УДК 51

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СУММЫ КОНЕЧНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ РЯДОВ

Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики
Гутова Е.В., ст. преподаватель кафедры математики
Николаев Ю.А., студент гр. АГс-161, IV курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

В данной работе предлагается способ нахождения суммы геометрической прогрессии, состоящей из конечного числа слагаемых, основанный на формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии, рассматриваемой как сходящийся ряд. Данный методический подход отличается от способа вычисления суммы конечной геометрической прогрессии, приводимого в современных школьных учебниках по математике, и является новым. Поскольку геометрическая прогрессия является одним из наиболее часто используемых видов числовых последовательностей в математическом анализе (например, при доказательстве различных признаков сходимости рядов и в других приложениях), то теоретическую и практическую значимость предлагаемого авторского подхода трудно переоценить.

Пусть последовательность $\{b_k\}$, $(k = 1, \dots, n)$ – геометрическая прогрессия, т.е.

$$b_k = b_1 \cdot q^{k-1}, (k = 1, \dots, n) \qquad (1)$$

где $b_1 \neq 0$ – ее первый элемент, а q – ее знаменатель. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad (2)$$

– частичную сумму из n элементов геометрической прогрессии, где n конечно.

Найдем сначала сумму S бесконечной геометрической прогрессии, понимая ее, согласно [1], как предел последовательности частичных сумм S_n (см. (2)) при неограниченном возрастании номера n, т.е.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \qquad (3)$$

предполагая, что предел в (3) при $n \to \infty$ существует. Тогда, подставляя выражение (1) в соотношение (2), запишем:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_1 \cdot q^{k-1} = b_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = b_1 \cdot \left(q^0 + \sum_{k=2}^{\infty} q^{k-1} \right) =$$

$= b_1 \cdot (1 + q \cdot \sum_{k=2}^{\infty} q^{k-2})$.

Т.о., $S = b_1 \cdot (1 + q \cdot \sum_{k=2}^{\infty} q^{k-2})$. Сделаем в последней сумме замену $m = k - 1 = 1, 2, \dots; k - 2 = m - 1$.

Тогда $S = b_1 \cdot (1 + q \cdot \sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1}) = b_1 + qb_1 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = b_1 + qS$.

В итоге $S = b_1 + qS$, откуда следует, что

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} b_1 \cdot q^{k-1} = \frac{b_1}{1-q} \qquad (4)$$

С другой стороны, по необходимому признаку сходимости ряда [1], $\lim_{k\to\infty} b_1 q^{k-1} = 0$, что равносильно условию $\lim_{m\to\infty} q^m = 0$ (т.к. $b_1 \neq 0$), которое эквивалентно неравенству

$$|q| < 1, \qquad (5)$$

т.е. формула (4) справедлива при условии (5).

Тогда, предполагая, что выполняется (5) и существует предел при $n \to \infty$ в (3), имеем, согласно (1) и (2),

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_1 \cdot q^{k-1} - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_1 \cdot q^{k-1}, \text{т. е.}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_1 \cdot q^{k-1} - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_1 \cdot q^{k-1}.$$

Сделаем во второй сумме замену $m = k - n = 1, 2, \dots; k = m + n$. Тогда с учетом (4) получим

$$S_n = S - \sum_{m=1}^{\infty} b_1 q^{m+n-1} = S - q^n \sum_{m=1}^{\infty} b_1 q^{m-1} = S - q^n S = S(1 - q^n) =$$

$$= \frac{b_1}{1-q}(1 - q^n) = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},$$

т.е., в силу (1) и (2),

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \; (|q| < 1) \qquad (6)$$

или

$$S_n = b_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \; (|q| < 1). \qquad (6')$$

Справедливость формулы (6) или (6′) нетрудно доказать методом математической индукции и в случае, когда условие (5) не выполнено, т.е. при $|q| > 1$ или $q = -1$.

Заметим, что, переходя к пределу при $n \to \infty$ в формуле (6′) и принимая во внимание, что $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ при условии (5), вновь получим формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии (4).

Кроме того, необходимо отметить, что при выводе формулы (6) на основе предложенного авторского подхода, базирующегося на теории рядов, было получено следующее соотношение, связывающее суммы S_n и S конечной и бесконечной геометрической прогрессии соответственно:

$$S_n = S(1 - q^n)\ (|q| < 1;\ n = 1, 2, \dots) \qquad (7)$$

Отметим, что формула (7) имеет место и при $n = 0$, если в соответствии с (2) формально считать, что сумма $S_0 = \sum_{k=1}^{0} b_k = 0$ как сумма элементов пустого множества.

Проиллюстрируем формулы (4), $(6')$ и (7) на следующем примере.

Пример 1.

При $b_1 = 2, q = 1/2$ по формуле (4) найдем

$S = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot (\frac{1}{2})^{k-1} = 2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots) = \frac{2}{1-1/2} = 4.$ По формуле $(6')$, например, для $n = 10$ имеем

$$S_{10} = 2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{512}\right) = \frac{2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$= \frac{2 \cdot 1023/1024}{1/2} = \frac{1023}{256}$, т.е. $S_{10} = \frac{1023}{256}$.

С другой стороны, подставляя в (7) $S = 4, n = 10$ и $q = 1/2$, получаем $S_3 = 4\left(1 - (\frac{1}{2})^{10}\right) = 4 \cdot \frac{1023}{1024} = \frac{1023}{256}$, что совпадает с результатом, полученным выше из выражения $(6')$.

Заметим, что формулы $(4), (6')$ и (7) остаются справедливыми и для отрицательного знаменателя, т.е. при условии, что $-1 < q < 0$. Рассмотрим следующий пример.

Пример 2.

При $b_1 = 2, q = -1/2$ по формуле (4) найдем

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot (-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) =$$

$= \frac{2}{1+1/2} = 4/3.$

По формуле $(6')$, к примеру, для $n = 10$ имеем

$$S_{10} = 2\sum_{k=1}^{10}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{512})$$

$= \frac{2\left(1-(-\frac{1}{2})^{10}\right)}{1+1/2} = \frac{2 \cdot 1023/1024}{3/2} = \frac{1023}{768}$, т.е. $S_{10} = \frac{1023}{768}$.

Тогда, подставляя в (7) $n = 10, S = 4/3$ и $q = -1/2$, получаем

$S_3 = (4/3)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right) = (4/3) \cdot \frac{1023}{1024} = \frac{1023}{768}$, что совпадает с ответом, найденным ранее из $(6')$.

Список литературы:

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. Т. 2. – М.: Высш. шк., 1988. – 576 с.