

УДК.514

ТРИ СПОСОБА ВЫЧИСЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТЬЮ

Пирогова Е. А., студентка гр. ГКб-191, 1 курс,
Липина Г. А., ст.преподаватель
Научный руководитель: Гоголин В.А., д.т.н., профессор
Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачёва
г. Кемерово

Известны формулы вычисления расстояния от точки до прямой [1] и расстояния между прямой и параболой. [2]. В литературе и в Интернете формулу для вычисления расстояния между прямой и окружностью мы не нашли, и поэтому решили вывести ее сами.

Постановка задачи. Дано уравнение прямой $Ax+By+C=0$ и уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат, которые показаны на рисунке.

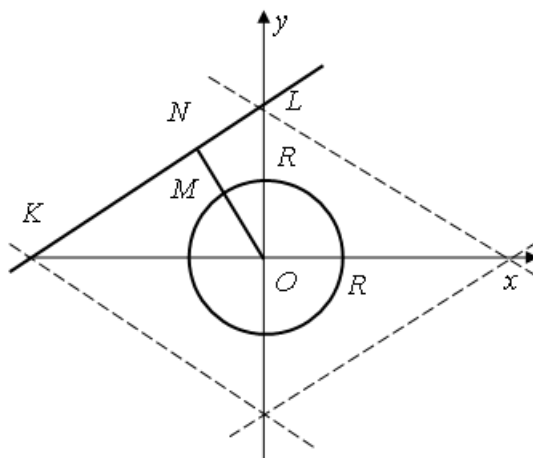


Рисунок. Расположение прямой и окружности

Считается, что прямая и окружность не пересекаются и не касаются. То есть, система уравнений, составленная из уравнения прямой и уравнения окружности, не имеет решений. Возможны четыре варианта расположения прямой и окружности. Рассмотрим один из них, так как три других варианта расположения прямой относительно окружности (показаны пунктиром) следует предварительно преобразовать к первому варианту, изменив знаки коэффициентов в уравнении прямой. При этом расстояние между прямой и окружностью не изменится. Из рисунка следует, что при рассматриваемом положении прямой: $C < 0$; $A < 0$; $B > 0$. Требуется вычислить длину MN . Этот

отрезок лежит на перпендикуляре, опущенном из начала координат на прямую, тогда $MN = ON - R$.

Первый способ вывода формулы для вычисления расстояния между прямой и окружностью основан на элементарной геометрии.

По теореме Пифагора гипотенуза в треугольнике OKL :

$$KL = \sqrt{OK^2 + OL^2} = \sqrt{\frac{C^2}{B^2} + \frac{C^2}{A^2}} = \frac{C}{AB} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Здесь учтено, что $OK = \frac{-C}{A}$, $OL = \frac{-C}{B}$.

Площадь треугольника OKL : $S = \frac{KL \cdot ON}{2} = \frac{OL \cdot OK}{2}$.

Отсюда $ON = \frac{OL \cdot OK}{KL} = \frac{-C/B \cdot C/A}{\frac{C}{AB} \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Расстояние между прямой и окружностью

$$MN = ON - R = \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}} - R.$$

Второй способ расчета искомого расстояния основан на формуле аналитической геометрии, позволяющей вычислить расстояние от точки до прямой.

По этой формуле вычисляем расстояние от начала координат до прямой:

$$ON = \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

И далее, так как $MN = ON - R$, получаем формулу вычисления расстояния между прямой и окружностью

$$MN = ON - R = \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}} - R.$$

Третий способ состоит в использовании дифференциального исчисления для нахождения минимума функции [3].

Выберем произвольную точку на окружности $N(x; \sqrt{R^2 - x^2})$. Она находится на расстоянии от прямой, которое можно найти по известной формуле [1]:

$$d = -\frac{Ax + B \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1).$$

Найдем производную этой функции:

$$d' = \frac{-1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \left(\frac{A\sqrt{R^2 - x^2} - Bx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right).$$

Приравняем производную к нулю и получим следующее уравнение для нахождения критической точки на экстремум:

$$x = \frac{AR}{\sqrt{A^2 + B^2}} . \quad (2)$$

Это – точка минимума функции (1). Подставив найденное значение x из (2) в (1), получим минимальное значение d , которое совпадает с ранее полученным.

Таким образом, расстояние между прямой и окружностью вычисляется по формуле: $d = \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}} - R$.

Рассмотрим частные случаи.

При $B = 0$ прямая становится параллельной оси Oy , при этом расстояние между прямой и окружностью $d = \frac{-C}{A} - R$.

При $A = 0$ прямая становится параллельной оси Ox , при этом расстояние между прямой и окружностью $d = \frac{-C}{B} - R$.

Список литературы

1. Привалов И.И. Аналитическая геометрия [Текст]: учебник для вузов / И. И. Привалов.– СПб: Лань, 2008.– 304 с.
2. Булыгин И.А. Расстояние между параболой и прямой/ И.А. Булыгин, Н.О. Камышникова, А.В. Дягилева // В сборнике: Сборник материалов X Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых с межд. участием «Россия молодая», 2018. – С. 74804.1-74804.4.
3. Гоголин В. А. Математический анализ [Текст]: учебное пособие для студентов технических и экономических направлений, изучающих дисциплины «Математика» и «Математический анализ» / В. А. Гоголин, И. А. Ермакова ; ФГБОУ ВО «Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева», Каф. математики, Кемерово: Издательство КузГТУ, 2016.– 114 с.