УДК 519.86

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЙ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Петрова М.А., 10 класс, гимназия №71 («Радуга») г. Кемерово
Мальцева О.М., ст. преподаватель кафедры математики
Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

В работе рассматривается метод доказательства утверждений (и в частности, тождественных равенств), называемый методом математической индукции. Данный метод, является достаточно универсальным и общим подходом, применяемым к обоснованию различных соотношений в математике (формул, равенств, неравенств и утверждений более общего вида), которые могут понадобиться как при решении сугубо теоретических, так и прикладных задач из различных математических дисциплин (алгебры, геометрии, математического анализа и др.), что и определяет его востребованность в качестве одного из самых мощных математических инструментов доказательства и, как следствие, теоретическую, а также практическую его значимость.

Указанный метод, в свою очередь, основан на следующей аксиоме, сформулированной математиком Д. Пеано и называемой принципом индукции: пусть некоторое множество натуральных чисел, содержащее число 1, содержит и произвольное число n; если оно содержит последующее число n+1, то оно содержит все натуральные числа [1, с. 62].

Метод математической индукции формулируется следующим образом: Пусть требуется доказать утверждение для каждого натурального числа n. Тогда нужно проверить его справедливость для $n=1$. Далее, предполагая, что оно верно при любом натуральном n, необходимо доказать, что оно будет верно и при $n+1$. Тем самым обосновывается справедливость доказываемого утверждения для произвольного натурального числа.

Покажем метод математической индукции на следующем примере [2, с.5].

Пример 1. Доказать тождество

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1 \; (n = 1, 2 \ldots) \cdot \qquad (1)$$

Доказательство проведем по методу математической индукции в два шага.

1) При *n=1* утверждение (1) примет вид: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = 2! - 1$, что равносильно соотношению 1=1, являющемуся истинным равенством, то есть (1) выполняется.

2) Предположим, что утверждение (1) справедливо для любого натурального числа *n*. Тогда по предположению математической индукции для числа *n+1* имеем

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1)(n+1)! = [(n+1)! - 1] + (n+1)(n+1)! = (n+1)![1+(n+1)] - 1 =$$

$$= (n+1)![n+2] - 1 = (n+2)! - 1.$$

Таким образом, формула (1) верна и при *n+1*, а значит, методом математической индукции она доказана.

Отметим, что если нужно доказать утверждение для всех целых *n*, начиная с некоторого значения $n=n_0$, то доказательство по методу математической индукции осуществляется аналогично. При этом на первом шаге истинность утверждения проверяется для $n=n_0$. Дальнейшая схема доказательства не меняется.

В некоторых задачах метод математической индукции требуется применять в более общей форме для доказательства утверждений (в частности, равенств и неравенств) при целых значениях $n=n_0$, n_0+1, … Он также состоит из двух шагов [3, с.85; 4, с. 45]:

1) необходимо показать, что доказываемое утверждение справедливо при $n=n_0$;

2) из предположения истинности утверждения для всех целых значений $k= n_0+1,…,n$ (в частности, для *n*) следует его истинность для $k=n+1$.

Проиллюстрируем эту схему на примере [3, с. 46].

Пример 2. Доказать, что члены последовательности

$$a_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}, a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ b = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ (n = 1, 2, ...), \tag{2}$$

где N – множество натуральных чисел, т.е. a_n- целые положительные числа.

Доказательство. Докажем утверждение (2) индукцией по *n* в два этапа.

1) При *n=1* из соотношения (2) имеем

$$a_1 = \frac{a-b}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 > 0$$ - целое, то есть утверждение (2) истинно.

2) Допустим, что данное утверждение верно при всех *k=1;2;…;n*, т.е.

$$a_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} > 0 \ (n = 1, 2, ...)$$ - целое. Тогда, в силу (2), разность

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}} =$$

$$=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1\right]-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}-1\right]}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{5-1}{2^{2}}\right)+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-5}{2^{2}}\right)}{\sqrt{5}}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}=a_{n-1}.$$

Таким образом, получили рекуррентную формулу

$$a_{n+1}=a_{n-1}+a_{n}\quad (n=1,2,...). \tag{3}$$

Так как по предположению $a_k > 0$ - целое $\forall k=1;...;n,$ то, в частности, при $k=n-1$ и $k=n$ числа a_{n-1} и a_n- целые неотрицательные числа. Поэтому из (3) следует, что a_{n+1} также целое неотрицательное число, а значит, утверждение (2) по индукции доказано.

Числа a_n, определяемые формулой (3) при условиях $a_1 = a_2 = 1$, называются числами Фибоначчи – по имени крупнейшего математика средневековья Леонардо Пизанского (1180-1240), рассмотревшего впервые эти числа [5, с. 37].

Заметим, что формула (2) может быть получена как решение разностного (возвратного) уравнения (3) при начальных условиях

$$a_1 = a_2 = 1. \tag{3'}$$

Легко проверить, что если последовательности $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ (n=1,2,…) удовлетворяют уравнению (2), то их линейная комбинация, т.е. последовательность $\{A_1 \cdot b_n + A_2 \cdot c_n\}$ $(n=1,2,...)$, где $A_1, A_2 \in R$ – произвольные действительные числа, также удовлетворяет этому уравнению. Поэтому для нахождения общего решения уравнения (3) (то есть всех последовательностей, которые ему удовлетворяют) достаточно найти два его частных решения $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$. При этом, так как (3) – разностное уравнение второго порядка, нужно задать два начальных числа a_1, a_2 с учетом условий (3’). Будем искать частные решения в виде

$$b_n = \lambda_1^n;\ c_n = \lambda_2^n,\ (n=1,2,\ldots), \tag{4}$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ - некоторые постоянные.

Подставляя выражение для b_n из (4) в (3), получаем $\lambda_1^{n+1}=\lambda_1^{n}+\lambda_1^{n-1}(n=2,3,...)$ или, сокращая на $\lambda_1^{n-1}\neq 0$, запишем $\lambda_1^{2}=\lambda_1+1$, что равносильно $\lambda_1^{2}-\lambda_1-1=0$. Аналогично можно показать, что

$\lambda_2^2-\lambda_2-1=0$, подставляя c_n в (3). Таким образом, значения λ_1 и λ_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2-\lambda-1=0, \qquad (5)$$

называемого характеристическим. Найдем дискриминант уравнения (5): D=1+4·1=5>0. Следовательно, имеем два различных корня $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Тогда общее решение разностного уравнения (3) примет вид

$$a_n=A_1\cdot\lambda_1^n+A_2\cdot\lambda_2^n\,(n=2,3,\ldots). \qquad (6)$$

Подставляя в (6) n=1 и n=2 и учитывая начальные условия (3’), получили систему двух линейных уравнений относительно двух неизвестных A_1 и A_2:

$$\begin{cases}a_1=A_1\cdot\lambda_1+A_2\cdot\lambda_2=1\\ a_1=A_1\cdot\lambda_1^2+A_2\cdot\lambda_2^2=1\end{cases} \qquad (7)$$

Следовательно, в силу первого уравнения (7),

$$A_2=\frac{1}{\lambda_2}(1-A_1\cdot\lambda_1). \qquad (8)$$

Подставляя (8) во второе уравнение системы (7), получим:
$A_1\cdot\lambda_1^2+(1-A_1\cdot\lambda_1)\lambda_2=1$ или $A_1(\lambda_1^2-\lambda_1\cdot\lambda_2)=1-\lambda_2$. Отсюда найдем $A_1=\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1^2-\lambda_1\cdot\lambda_2}=\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}$. По теореме Виета для корней уравнения (5) имеем $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=1\\ \lambda_1\cdot\lambda_2=-1\end{cases}$, откуда $\lambda_1=1-\lambda_2$. Тогда $A_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}$.

Подставляя значения корней уравнения (5) в выражение для A_1, получим

$A_1=\frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Итак,

$$A_1=\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad (9)$$

Подставляя (9) в выражение (8), с учетом того, что $\frac{1}{\lambda_2}=-\lambda_1$, найдем $A_2=-\lambda_1\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)=\frac{-\lambda_1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. Таким образом,

$$A_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}. \qquad (10)$$

В итоге, подставляя выражения (9) и (10) в (6), получим формулу (2), где a=λ_1 b=λ_2.

Список литературы:

1. Теплухин С. В., Мальцева О. М. Принцип индукции //Актуальные проблемы развития образования на современном этапе: материалы симпозиума XIV (XLVI) Международной научно-практической конференции «Образование, наука, инновации: вклад молодых исследователей», посвящённой 45-летию Кемеровского государственного университета. [Электронный ресурс]. – Кемерово: КемГУ, 2019. – Вып. 20. – С. 61-63.

2. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. / Б.М. Ивлев и др. 2-ое изд. – М.: Просвещение, 1993. – 48 с.

3. Ваховский Е.Б., Рывкин А.А. Задачи по элементарной математике. – М.: Наука, 1969. – 496 с.

4. Лидский В.Д., Овсянников Л.В., Тулайков А.Н., Шабунин М.И. Задачи по элементарной математике. – М.: Наука, 1969. – 416 с.

5. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. - М.: Наука, 1976. – 384 с.