УДК.51

ПОНЯТИЕ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Кошкин А.С. студент гр. ФПс-191, I курс
Волков В.М., доцент кафедры математики, к.ф.-м.н.
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева.
г. Кемерово

Впервые барицентрические координаты были введены Августом Фердинандом Мёбиусом в 1827 году, когда он рассматривал задачу, какие рассматривая задачу, какие массы нужно поместить в вершины данного треугольника, чтобы данная точка была центром тяжести этих масс (Рис.1)

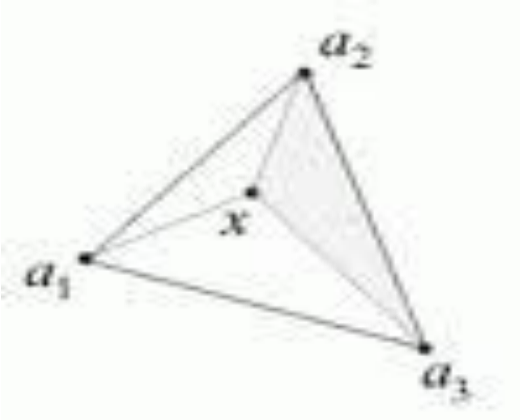

Рис. 1

a_1, a_2, a_3 – вершины которым сообщается масса

X – центр тяжести масс

Центр тяжести (центр масс) системы материальных точек называют барицентром. Барицентрические же координаты – это координаты точки относительно системы координат, начало которой находится в центре тяжести системы.

Рассмотрим следующие теоремы:

Теорема 1: Пусть на прямой даны различные точки A_1 и A_2. Тогда любая точка A этой прямой имеет барицентрические координаты относительно точек A_1 и A_2 (можно подобрать такие числа α_1 и α_2, чтобы точка A была центром масс точек $\alpha_1 A_1$ и $\alpha_2 A_2$).

Доказательство:

1) Если A лежит на отрезке A_1A_2, то барицентрическими координатами точки A будет пара (α_1, α_2), где $\alpha_1 = AA_1, \alpha_2 = AA_2$, что следует из свойства центра тяжести.

2) Если А лежит на продолжении A_1A_2 за точку A_1 (или A_2), то барицентрическими координатами точки А будет пара (α_1,α_2), где $\alpha_1 = -AA_1$, $\alpha_2 = AA_2$, что следует из свойства центра тяжести.

3) Если $A=A_1$ (или $A=A_2$), то барицентрическими координатами точки А будет пара (α_1,α_2), где $\alpha_1 \neq 0$ — любое число, а $\alpha_2 = 0$ (в случае $A=A_2$ — наоборот). Теорема 1 доказана.

Теорема 2: Пусть на плоскости фиксирован невырожденный $\Delta A_1A_2A_3$. Тогда любая точка А этой плоскости имеет барицентрические координаты относительно $\Delta A_1A_2A_3$.

Доказательство: Очевидно, что либо $AA_1 \not\parallel A_2A_3$, либо $AA_2 \not\parallel A_1A_3$, либо $AA_3 \not\parallel A_1A_2$. Пусть для определённости $AA_1 \not\parallel A_2A_3$. Пусть $AA_1 \cap A_2A_3 = B$. По теореме 1 точка В имеет барицентрические координаты (β_1,β_2) относительно точек A_2 и A_3, а точка А имеет барицентрические координаты (γ_1,γ_2) относительно точек A_1 и В. Тогда точка А имеет барицентрические координаты $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ относительно $\Delta A_1A_2A_3$, где $\alpha_1 = \gamma_1(\beta_1+\beta_2)$, $\alpha_2 = \gamma_2\beta_1$ $\alpha_3 = \gamma_2\beta_2$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3: Пусть на плоскости фиксирован невырожденный $\Delta A_1A_2A_3$. Тогда, если тройка чисел $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ является барицентрическими координатами точки К относительно этого треугольника, то тройка чисел $(k\alpha_1,k\alpha_2,k\alpha_3)$ при любом $k \neq 0$ так же является этого треугольника.

Доказательство: $k\alpha_1\overrightarrow{KA_1} + k\alpha_2\overrightarrow{KA_2} + k\alpha_3\overrightarrow{KA_3} = k(\alpha_1\overrightarrow{KA_1} + \alpha_2\overrightarrow{KA_2} + {}$ ${}+\alpha_3\overrightarrow{KA_3}) = \vec{0}$, так как $\alpha_1\overrightarrow{KA_1} + \alpha_2\overrightarrow{KA_2} + \alpha_3\overrightarrow{KA_3} = \vec{0}$. Значит тройка чисел $(k\alpha_1,k\alpha_2,k\alpha_3)$ — барицентрические координаты точки К относительно $\Delta A_1A_2A_3$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4: Пусть на плоскости фиксирован невырожденный $\Delta A_1A_2A_3$. Тогда, если тройки чисел $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ и $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ являются одновременно барицентрическими координатами точки К относительно этого треугольника, то можно подобрать такое $k \neq 0$, что $\beta_1 = k\alpha_1$, $\beta_2 = k\alpha_2$, $\beta_3 = k\alpha_3$.

Доказательство: Одно из чисел α_1, α_2 или α_3 не равно 0. Пусть $\alpha_1 \neq 0$. Тогда очевидно, что $K \notin A_2A_3$, то есть, $\overrightarrow{KA_2} \not\parallel \overrightarrow{KA_3}$. Если $\beta_1 = 0$, то $K \in A_2A_3$, что противоречит вышесказанному, то есть, $\beta_1 \neq 0$. Пусть $\beta_1 = k\alpha_1$, $\beta_2 = x\alpha_2$, а $\beta_3 = y\alpha_3$.

Тогда $\beta_1\overrightarrow{KA_1} + \beta_2\overrightarrow{KA_2} + \beta_3\overrightarrow{KA_3} = k\alpha_1\overrightarrow{KA} + x\alpha_2\overrightarrow{KA_2} + +y\alpha_3\overrightarrow{KA_3} = k(\alpha_1\overrightarrow{KA_1}$ $+\alpha_2\overrightarrow{KA_2} + \alpha_3\overrightarrow{KA_3}) + (x-k)\overrightarrow{KA_2} + (y-k)\overrightarrow{KA_3} = \vec{0}$, то есть, $(x-k)\overrightarrow{KA_2} = (k-y)\overrightarrow{KA_3}$, что может быть лишь при k=x=y. Теорема 4 доказана.

Теперь рассмотрим решение задач:

Задача 1: Дан $\Delta A_1A_2A_3$, $A_2A_3 = a_1$, $A_1A_3 = a_2$, $A_1A_2 = a_3$. Найти барицентрические координаты центра вписанной окружности $\Delta A_1A_2A_3$.

Решение. Рассмотрим систему материальных точек a_1A_1, a_2A_2, a_3A_3. Из свойства медианы и свойства 2 следует, что центр масс точек a_1A_1 и a_2A_2 — точка пересечения A_1A_2 и биссектрисы $\angle A_3$, т.е. центр масс системы лежит на биссектрисе $\angle A_3$. Аналогично он лежит на биссектрисах других углов, т.е. совпадает с центром вписанной окружности $\Delta A_1A_2A_3$. Следовательно барицентрические координаты центра вписанной окружности $\Delta A_1A_2A_3$ относительно этого треугольника — это тройка чисел (a_1, a_2, a_3). Задача 1 решена.

Задача 2 (прямая Гаусса): Прямая пересекает стороны AB, BC и продолжение стороны AC в точках D, E и F соответственно. Докажите, что середины отрезков CD, AE и BF лежат на одной прямой (рис. 2).

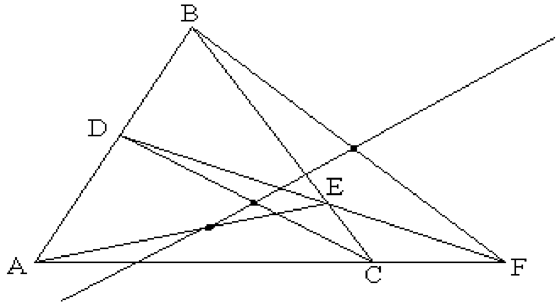

Рис. 2

Решение. Пусть $\frac{AD}{DB}=\alpha$, $\frac{DE}{EC}=\beta$, $\frac{CF}{CA}=\gamma$, тогда по теореме Менелая $\alpha\beta\gamma=1$, т.е. $\gamma=\frac{1}{\alpha\beta}$. Барицентрические координаты середины отрезка DC равны $(1,\alpha,\alpha+1)$. Действительно центр масс точек 1A и αB — точка D, т.е. центр масс системы точек 1A, αB, $(\alpha+1)$C совпадает с центром масс точек $(\alpha+1)$C и $(\alpha+1)$D, т.е. с серединой отрезка CD. Аналогично барицентрические координаты середины отрезка AE равны $(\beta+1,1,\beta)$, а середины отрезка BF — $(\gamma,\gamma-1,-1)$, т.е. $(\frac{1}{\alpha\beta},\frac{1-\alpha\beta}{\alpha\beta},-1)$. Подставляя найденные значения в формулу (2), получаем:

$$1\cdot1\cdot(-1)+(\alpha+1)\cdot(\beta+1)\cdot\frac{1-\alpha\beta}{\alpha\beta}+\alpha\cdot\beta\cdot\frac{1}{\alpha\beta}-\alpha\cdot(\beta+1)\cdot(-1)-1\cdot\beta\cdot\frac{1-\alpha\beta}{\alpha\beta}-(\alpha+1)\cdot1\times$$

$$\times\frac{1}{\alpha\beta}=-1+\frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1-\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\alpha\beta}{\alpha\beta}+1+\alpha\beta+\alpha-\frac{1-\alpha\beta}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha\beta}=$$

$$=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta}-\alpha\beta-\alpha-\beta+\alpha\beta+\alpha-\frac{1}{\alpha}+\beta-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha\beta}=0$$

Значит, середина отрезка BF лежит на прямой, проходящей через середины отрезков AE и CD. Задача 2 решена.

Задача 3: Дан $\Delta A_1A_2A_3$. $A_1A_2=a_3$, $A_1A_3=a_2$, $A_2A_3=a_1$. A_1L — биссектриса $\angle A_1 (L \in A_2A_3)$, A_1L пересекает описанную около $\Delta A_1A_2A_3$ окружность в точке N $(N \neq A_1)$. Найти $\frac{LN}{A_1N}$.

Решение. Очевидно, что барицентрические координаты точки A_1 равны (1, 0, 0), а барицентрические координаты точки L — (0, a_2, a_3). Поэтому уравнение биссектрисы $\angle A_1$ будет выглядеть так:

$$1\cdot a_2\cdot x_3+0\cdot 0\cdot x_2+0\cdot a_3\cdot x_1-0\cdot 0\cdot x_3-1\cdot a_3\cdot x_2-0\cdot a_2\cdot x_1=a_2x_3-a_3x_2=0 \quad ,$$

т.е. $x_3=\frac{a_3}{a_2}x_2$. Пусть барицентрические координаты точки N равны (x_1, x_2, x_3), тогда, учитывая (1), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1x_2a_3^2+x_1x_3a_2^2+x_2x_3a_1^2=0 \\ x_3=\frac{a_3}{a_2}x_2 \end{cases}$$

Поставив второе равенство в первое, получим:

$x_1x_2a_3^2+x_1x_2\frac{a_3a_2^2}{a_2}+x_2^2\frac{a_3a_1^2}{a_2}=0$. Если $x_2=0$, то $x_3=0$, и $N=A_1$. Значит $x_2\neq 0$, и $x_1a_3+x_1a_2+x_2\frac{a_1^2}{a_2}=0$, т.е. $x_1=-\frac{a_1^2}{a_2(a_2+a_3)}x_2$. Центр масс системы точек x_1A_1, x_2A_2, x_3A_3 совпадает с центром масс точек x_1A_1 и $(x_2+x_3)L$, поэтому $\frac{LN}{A_1N}=-\frac{x_1}{x_2+x_3}=\frac{a_1^2x_2}{a_2(a_2+a_3)x_2(1+\frac{a_3}{a_2})}=\frac{a_2a_1^2}{a_2(a_2+a_3)^2}=\left(\frac{a_1}{a_2+a_3}\right)^2$. Задача 3 решена.

Список литературы:

1. Смирнов Д.С., Решетюк А.Ю., Волкова Е.А. Понятие центра тяжести и его применения к решению геометрических задач;
2. Г.С.М. Кокстер. Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966. — 648 с.;
3. В.В.Прасолов. Задачи по планиметрии: Ч. 2, Учеб. пособие. — М.: Наука. Физматлит, 1995. — 240 с. Глава 14;
4. М.Б.Балк. Геометрические приложения понятия о центре тяжести. — М.: Физматгиз, 1959. — 230 с. §6;
5. М.Б.Балк и В.Г.Болтянский. Геометрия масс. — М. Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1987. — 160 с. §1-5, §11, §13;
6. Е.А.Морозова и И.С.Петраков. Международные математические олимпиады. Пособие для учащихся. — М.: Просвещение, 1971. — 254 с.;
7. А.А.Фомин и Г.М.Кузнецова. Международные математические олимпиады. — М.: Дрофа, 2000. — 160 с.