

УДК 514.182.2

АНАЛИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ И ПОЗИЦИОННЫХ ЗАДАЧ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Терентьев Д.Д., студент гр.ГОс-152, V курс

Шумкина Т.Ф., к.х.н., доцент

Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

Одной из основных задач начертательной геометрии как науки является изучение способов (методов) решения на плоскости задач, относящихся к пространственным геометрическим образам. Под геометрическими образами понимаются различные геометрические объекты (фигуры): точка, линия, плоскость, поверхность.

Все задачи, встречающиеся в курсе начертательной геометрии, можно разделить на две группы: метрические и позиционные. К первой группе относят задачи, связанные с определением метрических характеристик, натуральной величины сечения у плоских фигур при пересечении поверхностей плоскостями, развертки поверхности, расстояния и углов между объектами.

Группа задач, в которых требуется определить взаимное положение объектов в пространстве по отношению друг к другу, носит название позиционные задачи.

Решение метрических и позиционных задач в начертательной геометрии осуществляется различными графическими методами – часть задач может быть решена только классическим методом, а есть и задачи, при решении которых возможно использование двух и более различных способов. При этом критерием выбора всегда выступает точность, простота и лаконичность геометрических построений [1, 2].

Количество и характер геометрических построений зависит, в свою очередь, не только от сложности самой задачи, но, в большей степени, и от расположения самих объектов относительно плоскостей проекций. Так называемое «частное» положение фигуры относительно плоскости проекций, когда она располагается параллельно и (или) перпендикулярно к какой либо плоскости проекций, значительно упрощает решение метрических и позиционных задач. В случае с линейчатыми поверхностями и многогранниками речь идет о получении «вырожденной проекции», когда боковая поверхность (или грани у многогранников) располагается перпендикулярно к плоскости проекций. Такие задачи в курсеначертательной геометрии относят в отдельную группу, называемую «частные случаи», при решении которых не требуется использование определённого алгоритма, так как решение задачи, в большинстве случаев, уже есть на одной из плоскостей проекций и все решение сводится к построению недостающей проекции.

В начертательной геометрии существует пять графических методов решения метрических и позиционных задач на основе преобразования ортогональных проекций с применением различных видов проецирования, в результате чего объект переводится из общего положения в частное или преобразование сложной поверхности в более простую форму [3].

Методы преобразования ортогональных проекций:

1. Классические методы преобразования комплексного чертежа (метод плоскопараллельного перемещения и метод замены (перемены) плоскостей проекций).
2. Вспомогательное (косоугольное, центральное) проецирование.
3. Коллинеарные преобразования проекций.
4. Топологические преобразования проекций.
5. Метод квадратичных преобразований.

В методе плоскопараллельного перемещения, где ортогональные плоскости неподвижны, проецируемые объекты перемещаются относительно плоскостей проекций до требуемого положения.

В зависимости от траектории перемещения объекта метод плоскопараллельного перемещения разделяется:

1. Способ параллельного перемещения, где каждая точка перемещается по произвольной траектории, лежащей в плоскости, параллельной какой-либо плоскости проекций.
2. Способ вращения вокруг проецирующей прямой, где траектория перемещения точки – окружность, плоскость которой параллельна одной из плоскостей проекций.
3. Способ вращения вокруг линии уровня – вращение плоскости вокруг своей линии уровня до положения параллельного плоскости проекций: горизонтальной, если вращение осуществляется вокруг горизонтали и фронтальной – в случае вращения вокруг фронтали.
4. Способ вращения вокруг следа плоскости (способ совмещения), частный случай вращения вокруг линии уровня, где, в результате преобразований плоскость совмещается с плоскостью проекций.

Метод замены плоскостей проекций подразумевает неподвижность проецируемого объекта в пространстве и введение в существующую плоскостную систему новых плоскостей проекций (перпендикулярных оставшейся плоскости, чтобы не нарушать принцип ортогональности проекций), относительно которых объект будет занимать частное положение.

В ходе изучения курса начертательной геометрии в вузе, обучающиеся знакомятся только с первой группой графических преобразований, классическими методами преобразования чертежа, тогда как остальные методы остаются неизученными, хотя и могут в значительной степени упростить решение метрических и позиционных задач.

Рассмотрим суть и возможности остальных методов.

Метод вспомогательного проецирования основан на получении новых, так называемых «вспомогательных проекций», за счёт изменения направле-

ния проецирования с ортогонального на центральное или параллельное. При центральном проецировании центр проецирования может принадлежать самому проецируемому объекту. Такие преобразования позволяют решить задачу, ограничиваясь минимумом графических построений. Метод вспомогательного проецирования широко применяется в архитектуре при построении перспективы и теней.

Коллинеарные (проективные) преобразования удобны в использовании при решении задач на взаимное пересечение сложных нелинейчатых поверхностей. Данный метод основан на том, что сложные нелинейчатые поверхности не являются жёсткими, а могут деформироваться в «проецирующие» поверхности вместе с трёхмерным пространством, в котором они находятся. Такие преобразования достигаются предварительным заданием свойств и вида преобразованной поверхности, лучше отвечающим требованиям поставленной задачи.

Методы топологического преобразования подразумевают проведение преобразований с произвольными искажениями формы фигуры, но с обязательным соблюдением основных топологических свойств – взаимной однозначности и взаимной непрерывности. То есть, топологическое преобразование объекта есть произвольная его деформация без разрывов и склеивания, например, преобразование простой замкнутой кривой в окружность или эллипс, замкнутой поверхности – в новую поверхность (например, шар в цилиндр).

В основе метода квадратичных преобразований каждой точке плоскости взаимно соответствуют две точки, принадлежащие этой же плоскости (мнимых или действительных). Кривую линию можно преобразовать в прямую (точнее – в отрезки двух прямых) или гомотетичные кривые (подобно расположенные). Гомотетичные преобразования подразумевают получение подобных фигур с равенством соответствующих углов и пропорциональностью сторон.

Проиллюстрируем решение позиционной задачи на пересечение наклонного цилиндра с отрезком прямой различными методами начертательной геометрии (рис. 1-3).

На рис. 1, *а* показано решение позиционной задачи по классическому алгоритму, когда через отрезок прямой AB проведена плоскость, затем найдена фигура получившегося сечения и построены точки пересечения (M и N – точки входа и выхода) прямой с заданной поверхностью. Введённая вспомогательная плоскость общего положения пересекает поверхность цилиндра по образующим.

Используя метод вспомогательного проецирования при решении данной позиционной задачи можно значительно упростить решение и сократить количество построений за счёт выбора направления проецирования, параллельного оси цилиндра (см. рис. 1, *б*). В этом случае боковая поверхность цилиндра становится проецирующей, и её горизонтальная проекция приобретает собирательные свойства. Для нахождения точек пересечения прямой с по-

верхность цилиндра достаточно определить точки пересечения основания цилиндра и дополнительной проекции прямой (отрезок $A'B'$) на плоскости Π_1 .

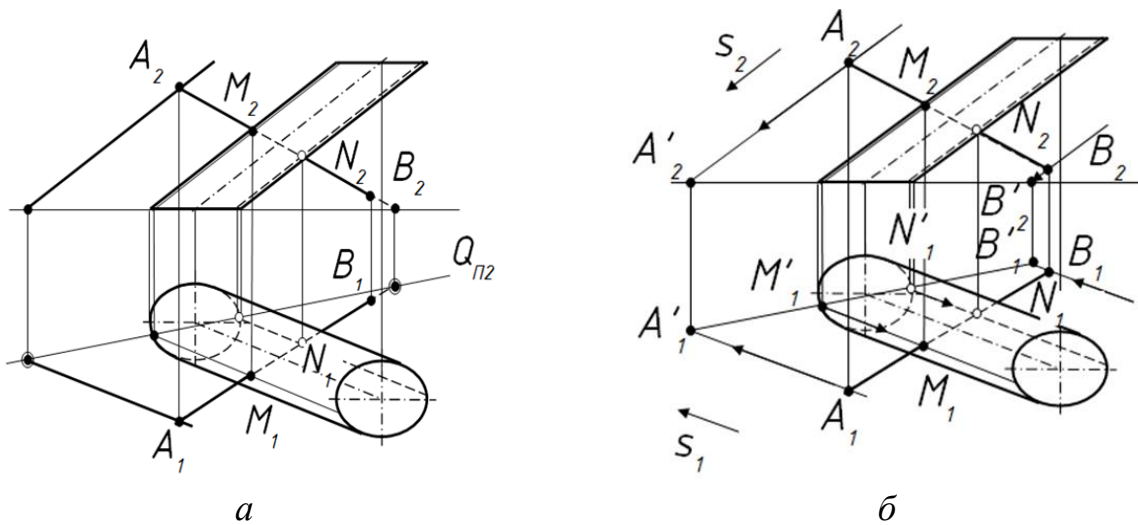


Рис. 1. Решение позиционной задачи различными методами
 а – классический, б – вспомогательное проецирование

Решая данную задачу методом преобразования чертежа, методом замены плоскостей проекций (см. рис. 2), требуется последовательное введение дополнительных плоскостей проекций: сначала новая плоскость проекций располагается параллельно оси цилиндра, а затем перпендикулярно. В конечном итоге остается найти точки входа и выхода в новой системе плоскостей проекций Π_4/Π_5 .

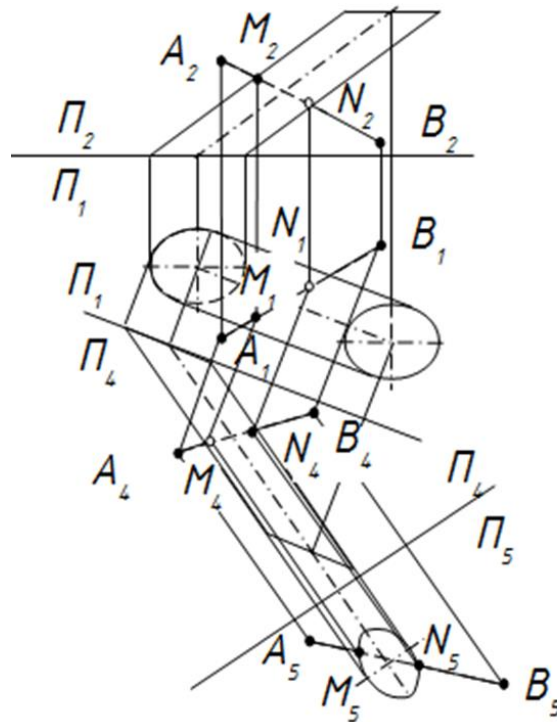


Рис. 2. Решение позиционной задачи методом замены плоскостей проекций

Применение метода коллинеарного преобразования в решении данной задачи идёт по пути перспективно-аффинного преобразования поверхности наклонного цилиндра в прямой круговой цилиндр (см. рис. 3).

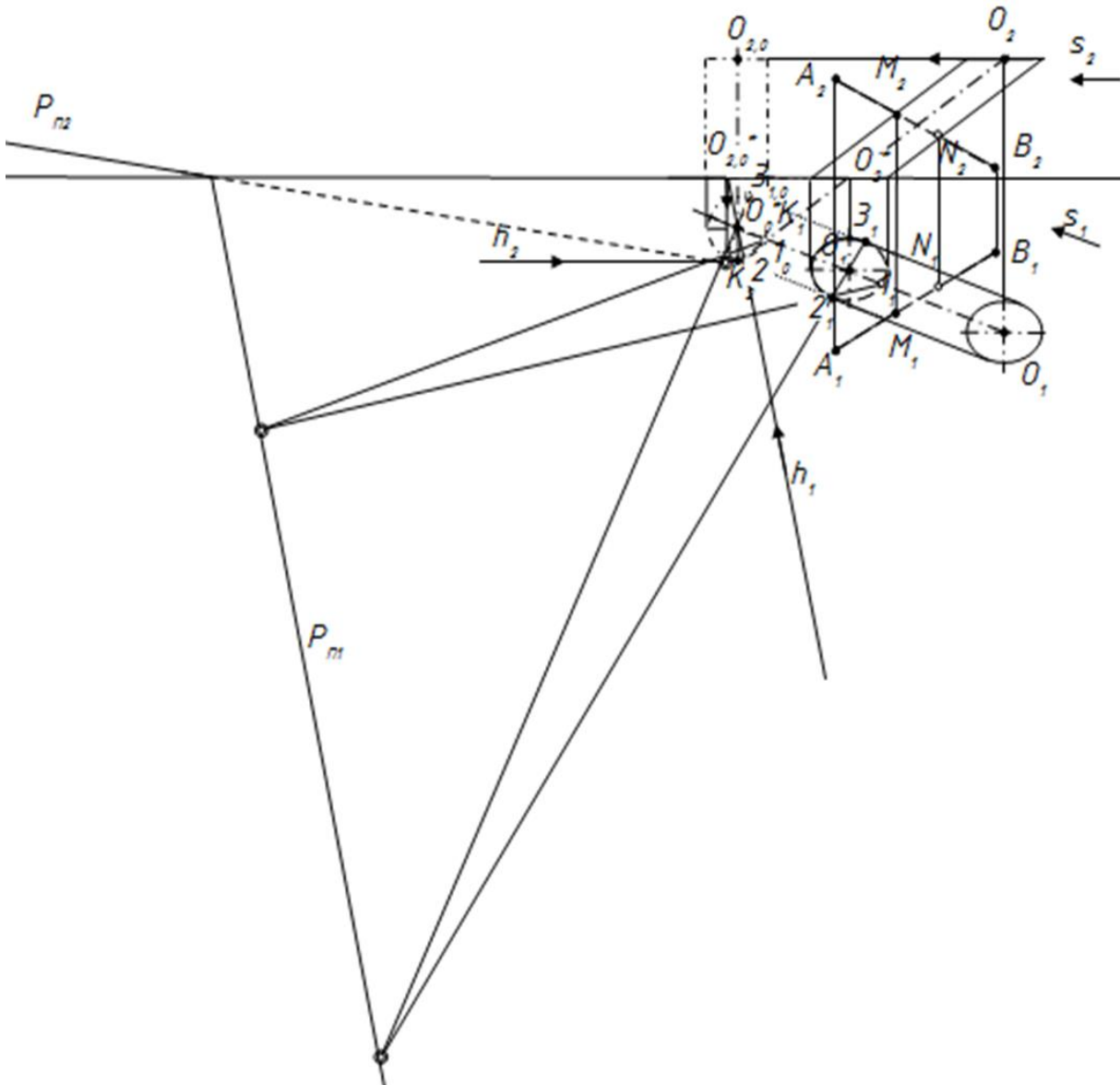


Рис. 3. Решение позиционной задачи методом коллинеарного преобразования

После построения проекции преобразованного цилиндра, родственного заданному, и определения плоскости родства (P_m, P_n – горизонтальный и фронтальный след плоскости родства) следует достроить дополнительную проекцию прямой (на рисунке на показано), а после нахождения точек пересечения родственной прямой с преобразованной поверхностью цилиндра вернуться в исходные проекции.

Так как методы топологического и квадратичных преобразования наиболее удобны при нахождении линии пересечения сложных нелинейчатых поверхностей, то решение конкретной задачи на нахождение точек пересечения прямой с поверхностью цилиндра нецелесообразно и, ввиду большего

количества построений (по сравнению с предыдущими методами) и поэтому не рассматривалось.

При сравнении всех методов, использованных в решении конкретной позиционной задачи, можно сделать выводы, что наиболее рациональным получается решение с использованием классического метода (см. рис. 1, *а*) и метода вспомогательного проецирования (см. рис.1, *б*), как наиболее быстрое, компактное и точное. Метод замены плоскостей проекций при решении данной задачи (см. рис. 2) не удобен, так как требует построения дополнительных проекций исходных объектов, с четким соблюдением правильного положения линий связи во избежание увеличения погрешности результата. Кроме того, проекция цилиндрической поверхности на введенной плоскости проекций P_5 – лекальная кривая, точность построения которой также влияет на конечный результат.

Если рассматривать методы начертательной геометрии с точки зрения возможности наиболее рационального применения при решении определённого круга задач, то метод плоскопараллельного перемещения (вращения) широко применяется при решении плоскостных задач – определение натуральной величины прямой, плоской фигуры, величины угла между прямыми и других метрических задач.

Метод замены плоскостей проекций делает наиболее рациональным решение широкого круга метрических и позиционных задач, особенно, при определении взаимного расположения геометрических образов в одной или нескольких параллельных плоскостях.

Метод вспомогательного проецирования имеет неоспоримое преимущество при решении позиционных задач на взаимное расположение геометрических образов, когда в результате геометрических преобразований возможно получить вырожденную проекцию одного из заданных объектов, используя собирательное свойство проекций проецирующего образа.

Метод проективных преобразований часто используется, как уже говорилось выше, при решении позиционных задач с нелинейчатыми поверхностями второго порядка.

Топологические преобразования позволяют находить решение наиболее сложных позиционных задач начертательной геометрии, с геометрическими телами, ограниченными нелинейчатыми поверхностями, имеющими подобные и подобно расположенные сечения. Решения таких задач другими методами слишком громоздки и не дают точного решения.

Что касается метода квадратичных преобразований, то он широко используется при нахождении линии пересечения тора с поверхностями второго порядка, так как позволяет заменить лекальные кривые, получаемые в результате сечения поверхностей плоскостями в соответствующие им прямые.

Кроме того, при решении конкретных задач очень часто используют сочетание различных методов.

Таким образом, задачи, решаемые с помощью методов начертательной геометрии, разнообразны. На примере решения различными методами пози-

ционной задачи на пересечение отрезка прямой с поверхностью наклонного цилиндра показано, что существующие методы графического решения задач имеют свою область практического применения, обеспечивая точность и быстроту решения.

В начертательной геометрии выбор метода решения задачи начинается всегда с анализа исходного условия, простоты и точности решения.

Универсальные и специальные методы начертательной геометрии находят широкое применение в системах автоматизированного проектирования САПР, при изготовлении сложных технических объектов.

Список литературы:

1. Фролов С.А. Начертательная геометрия / С.А. Фролов. – М.: ИНФРА-М, 2010. – 285 с.
2. Кислухин А.Г. Начертательная геометрия / А.Г. Кислухин. – М.: Стройиздат, 1973. – 368 с.
3. Фролов С.А. Методы преобразования ортогональных проекций / С.А. Фролов. – М.: Машиностроение, 1969. – 152 с.