УДК 624.073

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ

Кислицына Д. В., Королева Е. А., Стрелкова А. А., студенты гр. УЗс-161, IVкурс ,Глазков Ю. Ф., к.т.н., доцент
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

В данной статье рассмотрены методы расчета пластин, основные принципы, достоинства и недостатки каждого из них, приведено сравнение деформаций и усилий, рассчитанных разными методами.

Существует большое количество различных программных комплексов по расчету конструкций (балки, плиты, оболочки), но все же основная масса расчетов выполняется инженерами с применением аналитических методов в соответствиис классическими теориями расчета стержней, плит и оболочек.

В данной работе рассмотрены три метода расчета: метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ), метод, основанный на решении Навье.

В качестве примера принята прямоугольная в плане пластина, шарнирно опертая по контуру, находящаяся под воздействием поперечной нагрузки распределенной по закону квадратичной параболы (рис. 1).

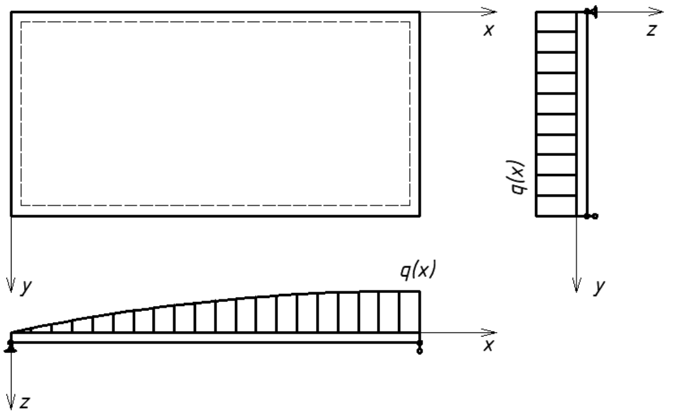

Рис 1. Схема плиты с действующей на нее нагрузкой

Необходимо определить прогибы пластины и внутренние усилия.

Нагрузка изменяется по следующему закону:

$$q(x) = 4q_o \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (1)$$

Достаточно эффективнымчисленным методом является метод конечных разностей (МКР), или как его еще называют методом сеток.

Согласно этому методу вся площадь пластинки покрывается сеткой линий с определенным шагом, точки, пересечения которых, называются узлами. Различают узлы внутренние, контурные и законтурные[2].

В качестве неизвестных принимаются значения прогибов во внутренних узлах сетки.

Заменой производных, входящих в уравнение (2), их приближенными выражениями, через конечные разности задача решения уравнения (2) сводится к решению линейных алгебраических уравнений относительно прогибов в узлах.

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{d^4w}{dx^4} + 2\frac{d^4w}{dx^2\ dy^2} + \frac{d^4w}{dy^4} = \frac{q(x,y)}{D} \qquad (2)$$

где w – прогиб произвольной точки срединной поверхности пластины, м; q – распределенная нагрузка, перпендикулярная к срединной плоскости пластины, кПа;D – цилиндрическая жесткость, МН×м.

Выражение (2) называют уравнением Софи Жермен, оно представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка относительно функции w, зависящей от двух переменных (x и y).

Прогибы, найденные в результате решения системы уравнений должны удовлетворять не только уравнению (2), но и граничным условиям[2].

Метод конечных элементов (МКЭ) также является численным методом, однако расчеты производят приоритетно при помощи программных комплексов. Для реализации метода конечных элементов используем программный комплекс «Лира».

Сущность данного метода заключается в том, что нагружаемая пластина представлена составленным из элементов конечных размеров. Каждый элемент, называемый конечным, задается в пространстве координатами вершин узлов. Представление тела, как совокупности узлов, делается для того, чтобы в дальнейшем рассчитать перемещения узлов вдоль осей координат (приращения перемещений) путем решения, как правило, линейной системы уравнений равновесия всех узлов [3].

Примером аналитического метода является решение Навье.

Метод, предложенный Навье в 1820 г. для решения уравнения (2),состоит в том, что искомую функцию прогибов w(x, y) назначают в виде двойного тригонометрического ряда Фурье:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (2)$$

где A_{mn} – постоянные числа, коэффициенты ряда; m, n – целые положительные числа 1, 2, 3, …

Функция прогибов для распределеннойнагрузки имеет следующий вид:

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi^4 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2})^2} sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (3)$$

Результаты усилий и прогибов, рассчитанных выше представленными методами, приведены в таблице 1.

Таблица 1

Сводная таблица прогибов и внутренних усилий

Метод / № точки	МКР	МКЭ	Навье
Прогибы w,м×10^{-3}			
6	10×10^{-3}	10,58×10^{-3}	10,23×10^{-3}
7	12×10^{-3}	12,48×10^{-3}	11,96×10^{-3}
Поперечная сила Q_x, ×10^{-3}МН/м			
6	21,52	21,52	23
7	9,16	9,16	-5,022
Изгибающий момент M_x ,×10^{-3} МН*м/м			
6	14,34	14,34	18
7	25,51	25,51	26
Крутящий момент H, ×10^{-3} МН*м/м			
6	0	0	0
7	0	0	0

Подводя итог, приоритетным методом расчета пластин на практике является МКЭ. Благодаря своей универсальности, отсутствию больших затрат времени на расчет при должных навыках, а также хорошей обеспеченности верифицированными программными продуктами, именно его чаще всего применяют на практике реального проектирования конструкций.

Список литературы:

1. Александров, А. В. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности : учебник для строительных специальностей вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – Москва : Высшая школа, 2002. – 399 с.
2. Глазков, Ю. Ф. Расчет балки-стенки на прочность по методу конечных разностей : методические указания к выполнению расчетно-графического задания по сопротивлению материалов для студентов строительных специальностей / Ю. Ф. Глазков, М. Ю. Насонов ; Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2007. – 26с.
3. Глазков, Ю. Ф. Специальные главы прочности. Расчет тонкостенных и стержневых конструкций методом конечных элементов [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов специальности 150202 «Оборудование и технология сварочного производства» / Ю. Ф. Глазков ; Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева. – Кемерово : КузГТУ, 2012. – 1 CD-ROM. – Доступна электронная версия: http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90571&type=utchposob:common

4. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности [Текст] : учебное пособие для инж.- строит. специальностей вузов / В. И. Самуль. – Москва : Высшая школа, 1970. – 288 с.

5. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – Москва : Физматтиз , 1963. – 636 с.