УДК 004

ИСТОРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Ерошевич К. В., студент группы МРа-191, I курс
Научный руководитель: Федосенков Б. А., д-р техн. наук, профессор,
Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева, г. Кемерово

Введение

С исторической точки зрения вейвлет-преобразование (операционное вейвлет-исчисление) является новым методом, хотя его математические основы восходят к работе Жан-Батиста Жозефа Фурье (Франция) на рубеже 18-19 веков. Фурье заложил основы теории частотного анализа, которая оказалась чрезвычайно важной и влиятельной.

Внимание исследователей постепенно переключилось с частотного анализа на масштабный, когда стало ясно, что подход, измеряющий средние значения в разных масштабах, может оказаться менее чувствительным к разного рода помехам.

Исторические аспекты возникновения и развития вейвлет-процессинга

Оригинальная идея принадлежит Фурье: аппроксимировать сложную функцию как сумму более простых функций, которые сами получаются из одной простой функции прототипа (материнской функции).

Функция-прототип, также известная как базисная функция, может рассматриваться как строительный блок, а исходная функция может быть аппроксимирована или – при определенных условиях – полностью представлена с помощью аналогичных строительных блоков.

Фурье использовал синусоиды различных частот в качестве строительных блоков. Представления Фурье использовались в различных областях, которые требовали анализа сигналов. Однако эти представления имели один существенный недостаток, связанный с использованием синусоид в качестве базисных функций. Синусоиды имеют идеальное представление в частотной области, но не во временной (говорят: «они хорошо локализованы в частотном пространстве»). Другими словами, они растягиваются во времени до бесконечности, и поэтому их нельзя использовать для аппроксимации нестационарных сигналов. С другой стороны, представление Фурье только обеспечивает отображение функции без указания о временной локализации. Поэтому для анализа нестационарных сигналов, спектральное содержание которых изменяется во времени, требуется время-частотное представление (TFR – Time-Frequency Representation), а не просто частотное представление.

Первая модификация преобразования Фурье, позволяющая анализировать нестационарные сигналы, появилась в виде кратковременного преобразования Фурье (STFT – Short Time Fourier Transform). Идея STFT заключалась в сегментации сигнала с помощью окна с временной локализацией и выполнении анализа для каждого сегмента. Поскольку преобразование Фурье было вычислено для каждого оконного (то есть локализованного по времени) сегмента сигнала, STFT смог обеспечить истинное время-частотное представление.

В 1932 году вышла статья физика *E.P. Wigner* по квантовой механике, касающаяся коррекции уравнения Шрёдингера, в которой *он* впервые ввел в рассмотрение особую функцию-распределение по типу распределений плотности вероятностей, содержащую так называемые «атомарные функции». Такая функция позволяла при обработке 1D-сигналов использовать методы адаптивной аппроксимации. Эта статья внесла свою лепту в получивший в дальнейшем признание аппарат вейвлет-преобразований.

В 1948 г. французский математик J. Ville в своей статье по использованию аналитических сигналов при их передаче по кабельной линии связи рассмотрел похожую функцию распределения. Впоследствии это распределение в теории обработки сигналов было названо распределением Вигнера-Вилле.

Деннис Габор (Венгрия – Англия, «отец голографии»), который был заинтересован в представлении сигнала с использованием колебательных базисных функций во время-частотном пространстве, был первым, кто изменил преобразование Фурье в виде STFT в 1946 году. В частности, Д. Габор ввел в практику обработки сигналов особую функцию («функцию Габора»), которая позволяла успешно аппроксимировать сигналы с наличием колебательных составляющих. При этом заметим, что эта функция описывалась пятью параметрами, что в итоге давало возможность весьма гибко подстраивать ее под аппроксимируемые реальные сигналы различной природы. В период с конца 1940-х по начало 1970-х годов было разработано множество других TFR, каждое из которых отличалось от других только выбором оконной функции.

Однако все эти преобразования страдали одним серьезным недостатком: все они использовали одно и то же окно для анализа всего сигнала. В конце 1970-х годов инженер-геофизик Д. Морле, столкнулся с проблемой анализа сейсмических сигналов, которые имели высокочастотные компоненты с короткими временными промежутками, а также низкочастотные компоненты с длинными временными промежутками. Все известные преобразования были способны анализировать либо высокочастотные компоненты, использующие узкие окна (широкополосный частотный анализ), или низкочастотные компоненты с использованием широких окон (узкополосный частотный анализ), но не оба сразу. Поэтому у него возникла гениальная идея использовать другую, специфическую, оконную функцию для анализа различных частотных диапазонов. Кроме того, все эти окна были созданы путем расширения или сжатия базисной функции Гаусса. Такие оконные функции имели *компактную поддержку* как по времени, так и по частоте (так как преобразование Фурье-Гаусса также является гауссовым). Д. Морле назвал свои базисные функции «вейвлетами постоянной формы». Однако он также столкнулся с большой критикой со стороны своих коллег. В 1980 году, в поисках помощи с целью найти математически строгую основу для своего подхода, Д. Морле встретил физика-теоретика квантовой механики А. Гроссмана, который помог ему формализовать преобразование и сформировать обратное преобразование. Но они не знали, что вейвлет-преобразование, разработанное ими, было своего рода повторным открытием в форме, возможно, немного другой, интерпретации работы А. Кальдерона 1964 года по гармоническому анализу.

Французский математик Y. Meyer, который обнаружил сходство между работами Д. Морле и А. Кальдерона в конце 70-х гг., также отметил, что было много избыточности в выборе базисных функций (которые были тогда известны как вейвлеты Морле). Очарованный этой элегантной схемой анализа нестационарных функций-сигналов, И. Мейер начал работать над созданием вейвлетов с улучшенной локализацией. В 1985 году он построил ортогональный вейвлет-базис функции с очень хорошей локализацией по времени и частоте. По иронии судьбы, оказалось, что другой гармонический аналитик, J.-O. Stromberg, уже обнаружил те же самые всплески около пяти лет назад. Также добавим, что ни И. Мейер, ни Ж.-О. Стромберг не первые обнаруживают ортонормированные вейвлет-базисные функции. Первооткрывателем был немецкий математик А. Хаар в 1909 году. Их практическое применение ограничено плохой частотной локализацией вейвлетов. Позже было обнаружено, что работы Хаара по разработке ортонормированных базисных функций были расширены в 1930-х годах Полом Леви, который изучал случайные сигналы броуновского движения.

В то же время, Ингрид Добеши (Бельгия-США) разработала вейвлет-фреймы для дискретизации временных и масштабных параметров вейвлета, что давало больше свободы в выборе базисных функций за счет некоторой избыточности. В 1992 году вышла ее наделавшая много шума книга «Ten lectures on wavelets», в которой изящно, и, в то же время, математически строго была изложена на фундаментальном уровне базовая теория вейвлет-функций и основы время-частотного вейвлет-анализа.

В 1986 году St. Mallat (Франция) разработал идею кратномасштабного анализа (MRA – Multi-Resolution Analysis) для дискретных вейвлет-преобразований (DWT – Discrete Wavelet Transform) совместно с И. Мейером, который позже, в 1988, году защитил PhD-диссертацию. Работа Ст. Малла позволяла анализировать 1D-сигналы в рамках меняющихся окон во временной и частотной областях. Также в 1988 году были заложены расширенные основы современной вейвлет-теории с введением новых вейвлет-базисов.

В последние десять лет в основном шли поиски других вейвлет-базисных функций с различными свойствами и модификациями алгоритмов MRA. В 1992 A. Cohen и И. Добеши с коллегами ввели понятие ортогональных вейвлетов с компактным носителем, что открыло широкие возможности в сфере обработки сигналов. Позже усилиями других математиков были разработаны вейвлет-пакеты, представляющие естественное расширение MRA.

Но при изобилии научных трудов математического уровня, публикаций, касающихся применению вейвлет-преобразований для целей автоматизации технологических процессов, практически нет.

Следует отметить, что одной из первых публикаций в России, посвященных проблемам автоматизации технологических процессов с активным применением аппарата вейвлет-преобразований, была докторская диссертация Федосенкова Б.А. (Россия), защищенная в Москве в 2005 году, в которой решались проблемы смесеприготовления в пищевой промышленности.

Применение вейвлет-преобразований в автоматизации технологических процессов

В последнее десятилетие в сфере автоматизации и систем управления технологическими процессами (ТП) начинают использоваться вейвлет-преобразования. В связи с этим ведутся новые разработки комплексов программ и устройств для работы с тем или иным вейвлет-преобразованием.

Есть много различных вейвлет-преобразований, но почти все они представляют сигнал в одномерном виде. Это не дает полную картину происходящего в объекте. Поэтому в системах автоматического и автоматизированного управления для текущего мониторирования и управления целесообразно использовать вейвлет-преобразования в многомерном виде. Также следует отметить, что все существующие на сегодняшний день так называемые SCADA-системы (системы диспетчерского уровня, выполняющие функции супервизорного управления и сбора данных – Supervisory Control and Data Acquisition) являются одномерными. А это обстоятельство не позволяет SCADA-системам сопровождать технологические производственные структуры, в которых в ходе производственного цикла возникают нестационарные процессы, то есть процессы с меняющимися мгновенными интенсивностями сигналов и мгновенными динамическими спектрами.

Мексиканская шляпа

Начнем с простого вейвлета - Мексиканской шляпы, показанного на Рис. 1. Нам удобнее представлять его «опрокинутым», с провалом посередине (верх шляпы) и двумя горбами по бокам.

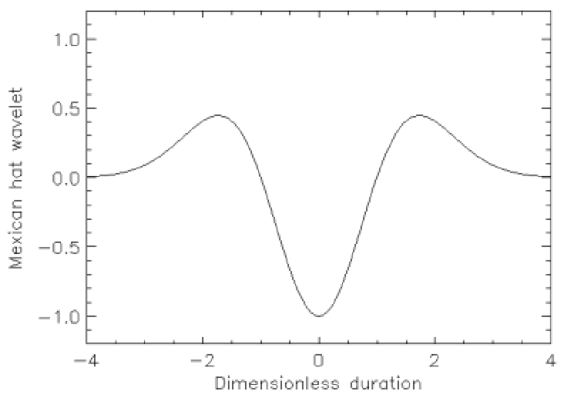

Рисунок 1- Вейвлет Мексиканская шляпа

Важно заметить, что для этого вейвлета площади положительных и отрицательных значений чисел под кривой равны. Этот факт известен как условие допустимости.

Аналитическое выражение для вейвлета Мексиканской шляпы:

$$g_2(z) = \left(z^2 - 1\right)\exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)$$

т.е. он является второй производной гауссиана. Условие допустимости (Добеши) выполняется если:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t)\, dt = 0$$

Условие допустимости означает, что существует обратное преобразование и применима формула Парсеваля. Выбор вида огибающей вейвлета для проведения анализа является одним из важнейших решений, которые должен принять исследователь. Общим правилом здесь является то, что вид вейвлета должен быть похож на вид анализируемых данных. Если сигнал гладкий, берем гладкий вейвлет типа рассмотренного выше, если нет - то делаем другой выбор.

Вейвлет морле

Вейвлет Морле - исторически первая функция, получившая название вейвлета. Хотя дискретные функции (вейвлеты) Хаара были изучены гораздо раньше вейвлетов Морле, но только с работы Морле началось изучение этих функций в контексте время-частотного анализа.

Вейвлет Морле тесно связан с кратковременным (оконным) преобразованием Фурье. Он получается следующим образом: берется комплексная синусоида, и на нее накладывается колоколообразная гауссовская функция (Рис. 2).

Непериодическая функция может быть усечена таким образом, чтобы условие допустимости удовлетворялось. Для синусоиды единичной частоты внутри огибающей ширины z_0 / π, имеем

$$\phi(x, z_0) = (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)\cdot \exp\left(\frac{-2x^2\pi^2}{z_0^2}\right) - \exp\left(\frac{-z_0^2}{2} - \frac{-2x^2\pi^2}{z_0^2}\right)$$

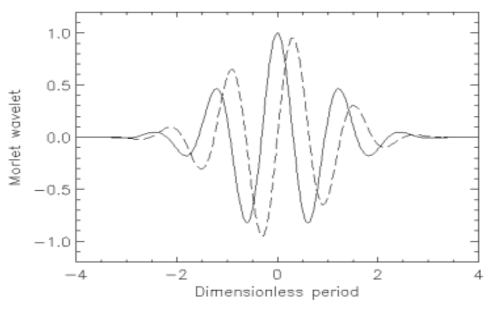

Рисунок 2 – Действительная (сплошная) и мнимая (штриховая) части вейвлета Морле при z_0 = 5.

Выбор z_0 отражает компромисс между локализацией во времени (Мексиканская шляпа локализует единичные пики) и по частоте (бесконечно протяженная синусоида локализована по частоте): значение $z_0 = 5$ рекомендуется, но может быть и изменено.

Так как вейвлет-преобразование имеет вещественную и мнимую части, удобно представить его в полярных координатах: норма есть амплитуда преобразования и, будучи связана с локальной энергией, представляет главный интерес, тогда как полярный угол (фаза) дополняет общую картину. Так же, как и в случае преобразования Фурье, для вычисления обратного преобразования требуется знание как вещественной, так и мнимой частей. Ниже будет показана только амплитудная часть преобразования. Для того, чтобы квадрат нормы преобразования Морле соответствовал бы локальной спектральной энергии, он должен быть поделен на нормирующий коэффициент

$$c_g = z_0^{\ 2} \exp(-z_0^{\ 2})\left[erfi(z_0)/2 - erfi(z_0/2)\right]$$

Для общего значения $z_0 = 5$, используемого в вышеприведенных графиках, $C_g = 1.44057$.

Комплексный вейвлет морле «cmorb-c»

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi B}} exp^{-\frac{t^2}{B}} \cdot exp^{j2\pi Ct}$$

Здесь B — пропускная способность; C — центральная частота.

В статье везде (без специального указания) величины B, C задаются с плавающей точкой.

Вейвлеты гауса

Наряду с разрывными функциями, подобными вейвлетам Хаара, в вейвлет-преобразованиях сигналов используются и непрерывные вейвлеты. Наиболее распространенные вещественные базисы таких вейвлетов конструируются на основе производных функции Гаусса $g(t) = \exp(-t^2 / 2)$:

$$\psi^{(n)}(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right).$$

Это обусловлено тем обстоятельством, что функция Гаусса имеет наилучшие показатели локализации как во временной, так и в частотной областях (Чуи, 2003). Для материнского гауссова вейвлета n-го порядка можно записать в более компактной форме:

$$\psi^{(n)}(t) = He_n(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}},$$

Вейвлеты шэннона

В функциональном анализе Шэннона К.Э. вейвлет может быть либо реальной, либо комплексной функцией. Анализ сигналов от идеальных полосовых фильтров определяет разложение, известное как вейвлет Шэннона.

$$\varphi\left(t\right) = \sqrt{B} \cdot \frac{sin(\pi Bt)}{\pi BT} \cdot exp^{j2piCt}$$

Здесь B — ширина полосы; C — центральная частота.

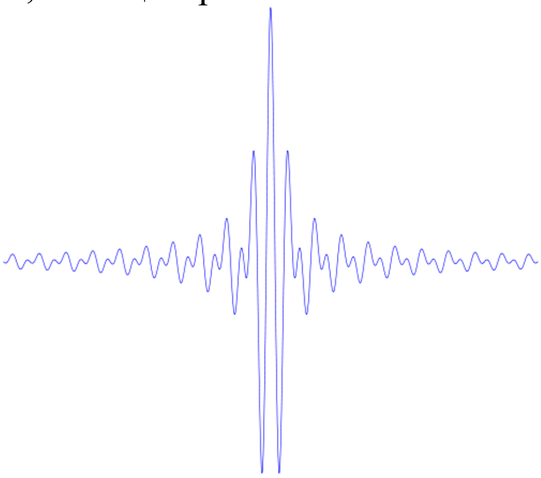

Рисунок 3 – Вейвлет Шэннона

Вейвлет габора

Вейвлеты Габора являются вейвлетами, сформированными Д. Габором. В них используются сложные функции, построенные так, чтобы служить основой для преобразований Фурье в теории информации и ее приложениях. Они очень похожи на Морле-вейвлеты. Эти вейвлеты также тесно связаны с фильтром Габора . Важное свойство вейвлета – сведение к минимуму произведения его стандартных отклонений во временной и частотной областях. Иными словами, неопределенность в информации, передаваемой этим вейвлетом, сводится к минимуму. С момента своего создания появились различные приложения: от обработки изображений для анализа состояния нейронов в зрительной системе человека до регистрации и управления динамикой технологических процессов в различных отраслях промышленности.

Функция вейвлета Габора является гауссовой и модулируется комплексной экспонентой; описывается следующим образом:

$$f(x) = e^{-(x-x_0)^2/a^2} e^{-ik_0(x-x_0)}$$

В отличии от других функций, обычно используемых в качестве оснований в преобразованиях Фурье, вейвлеты Габора облают свойствами локальности, возможности смещения по временной оси, изменения модуляции с определенными частотами, возможности варьирования фазы вейвлета в диапазоне (0, 2π) и нормирования его по мгновенной амплитуде.

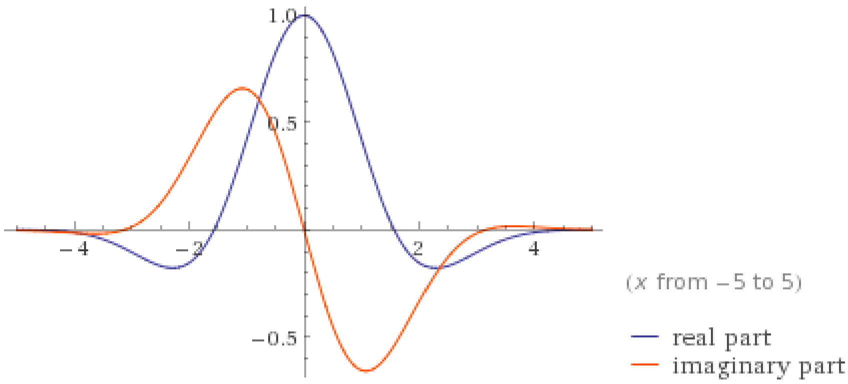

Рисунок 4 – Вейвлет Габора

Заключение

Вейвлет-анализ пользовался огромным вниманием и успехом в течение последнего десятилетия, а также в течение многих лет. Практически все сигналы, встречающиеся на практике, требуют время-частотного анализа и вейвлет-процессинга – очень простого и эффективного средства для проведения такого анализа. Так что же дальше? Теоретические разработки вейвлетов были в значительной степени завершены за последние два десятилетия. Использование вейвлетов в сфере автоматизации технологических процессов и систем управления играет огромную роль, так как в последние годы автоматизация быстро развивается и требует сокращения временных затрат на корректирующие воздействия на объект. А вейвлет-преобразования хорошо справляются с этим – помогают представить одномерный или многомерный сигналы с датчика в понятной для оператора форме. Это способствует более точному и оперативному управлению как в одномерных, так и в многомерных системах технологического назначения.

Список литературы

1. Федосенков Д. Б. Модальное управление процессами дозирования в среде пространства состояний и вейвлет-преобразований / Д. Б. Федосенко, А.А. Симикова, Б.А. Федосенков – Вестник АГТУ, 2019. – С. 46-58.
2. Polikar, Robbi. The Story of Wavelets1 / Robbi Polikar – Ames: Dept. of Electrical and Computer Engineering & The Biomedical Engineering Program, Iowa State University. – 1999.
3. Mallat, St. A Wavelet Tour of Signal Processing / St. Mallat. – San Diego: Academic Press, 1999. – P. 191-378.