УДК 511.3

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ. ЗАДАЧА КОМПОЗИЦИИ

Рязанов М.С., Тизоватов А.А. студенты гр. ЭРб-171, II курс
Казунина Г.А., профессор, д.т.н., доцент
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева,
г. Кемерово

Теория надежности изучает закономерности возникновения отказов технических устройств и методы их прогнозирования, а также способы повышения надежности устройств при конструировании, изготовлении и последующей эксплуатации. Для исследования и решения большого числа вопросов, возникающих в теории надежности, применяют методы теории вероятностей и математической статистики, особенно для получения количественных характеристик [1, 2]. Для описания распределений наработки до отказа используются различные виды распределений, в том числе и распределение Эрланга. Название это распределение получило по имени своего создателя — датского математика А.К. Эрланга, основателя научного направления по изучению трафика в телекоммуникационных системах и теории массового обслуживания. В 1909 году А.К. Эрланг опубликовал свою первую научную работу «Теория вероятности и телефонные разговоры», в которой он изучал проблему качества телефонной связи. С точки зрения математики модель Эрланга описывает распределение длительности промежутка не между соседними событиями в простейшем потоке, а через k событий, и является композицией k показательных распределений с интенсивностью λ. Составить композицию k показательных законов с параметром λ можно, находя последовательно композиции двух, трех и так далее законов [3]. Целью настоящей работы является построение распределения Эрланга при помощи характеристической функции.

Характеристическая функция $G_X(t)$ случайной величины X, впервые введенная русским математиком А.М. Ляпуновым в 1900 году и определяемая как математическое ожидание комплексной случайной величины e^{itX} [4]

$$G_x(t) = M\left[e^{itX}\right], \qquad (1)$$

является удобным инструментом для решения задачи композиции, поскольку обладает следующими свойствами. Так для суммы независимых случайных величин

$$X = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

характеристическая функция определяется как произведение характеристических функций:

$$G_X(t) = M\left[e^{it(x_1+x_2+\cdots+x_n)}\right] = M\left[e^{itx_1}\right]M\left[e^{itx_2}\right]\ldots .M\left[e^{itx_n}\right] = \\ = G_{x_1}(t)\cdot G_{x_2}(t)\ldots G_{x_n}(t). \qquad (2)$$

Кроме того, представление экспоненты в виде разложения в ряд позволяет найти начальные моменты распределения случайной $M[X^n]$ как коэффициенты при $\frac{(it)^n}{n!}$:

$$G_x(t) = M\left[1 + itx + \frac{(it)^2}{2!}x^2 + \frac{(it)^3}{3!}x^3 + \frac{(it)^4}{4!}x^4 \ldots\ldots\ldots\right] = \\ = 1 + itM[x] + \frac{(it)^2}{2!}M[x^2] + \frac{(it)^3}{3!}M[x^3] + \frac{(it)^4}{4!}M[x^4]\ldots\ldots = \\ = G(0) + G'(0)t + \frac{G''(0)}{2!}t^2 + \cdots \frac{G^{(k)}(0)}{k!}\ldots \qquad (3)$$

Также из соотношения (3) следует, что моменты распределения можно определить через значения производной характеристической функции в точке $t = 0$:

$$M[X^k] = (-i)^k {G_x}^{(k)}(0), \qquad k \geq 1. \qquad (4)$$

Характеристическую функцию непрерывного показательного распределения с плотностью вероятности $f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0$ находим как преобразование Фурье согласно (1):

$$G_x(t) = M\left[e^{itx}\right] = \lambda\int_0^\infty e^{ixt}e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda - it)x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}. \qquad (5)$$

Характеристическую функцию суммы $X = x_1 + x_2 + \cdots x_k$, каждое слагаемое которой является случайной величиной, распределенной по показательному закону с параметром λ, находим, согласно (2), как произведение характеристических функций:

$$G_X(t) = \frac{\lambda^k}{(\lambda - it)^k}\ . \qquad (6)$$

Числовые характеристики полученного распределения получаем согласно соотношению (4):

$$M[X] = -iG_X'(0) = -i\lambda^k(-k(\lambda - it)^{-k-1})(-i)\Big|_{t=0} = \frac{k}{\lambda}\ ;$$

$$M[X^2] = (-i)^2\cdot {G_X}^{(2)}(0) = \frac{k^2}{\lambda^2} + \frac{k}{\lambda^2}\ ;$$

$$D[x] = M[X^2] - M^2[X] = \frac{k}{\lambda^2}\ .$$

Функцию плотности вероятности восстанавливаем через преобразование Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(t)\,e^{-itx}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(\lambda - it)^k}e^{-itx}dt.$$

Несобственный интеграл вычисляем, используя теорему о вычетах [5] с учетом того, что подынтегральная функция в нижней полуплоскости имеет одну особую точку $t = -i\lambda$, которая является полюсом k-го порядка:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\left(-2\pi i\, res\left\{\frac{\lambda^k e^{-itx}}{(\lambda-it)^k}\right\}\Big|_{t=-i\lambda}\right)=-i\, res\left\{\frac{\lambda^k e^{-itx}}{(-i)^k(t+\lambda i)^k}\right\}\Big|_{t=-i\lambda}=$$
$$=\frac{\lambda^k}{(-i)^{k-1}}\frac{1}{(k-1)!}\lim_{t\to-\lambda i}\left(e^{-itx}\right)^{(k-1)}=$$
$$=\frac{\lambda^k}{(-i)^{k-1}}\frac{1}{(k-1)!}(-i)^{k-1}x^{k-1}e^{-ix(-\lambda i)}=\frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x}\ . \qquad (7)$$

В результате получили функцию плотности вероятности для распределения Эрланга k-го порядка. Вид функции распределения при различных значениях параметров представлен на рисунке 1.

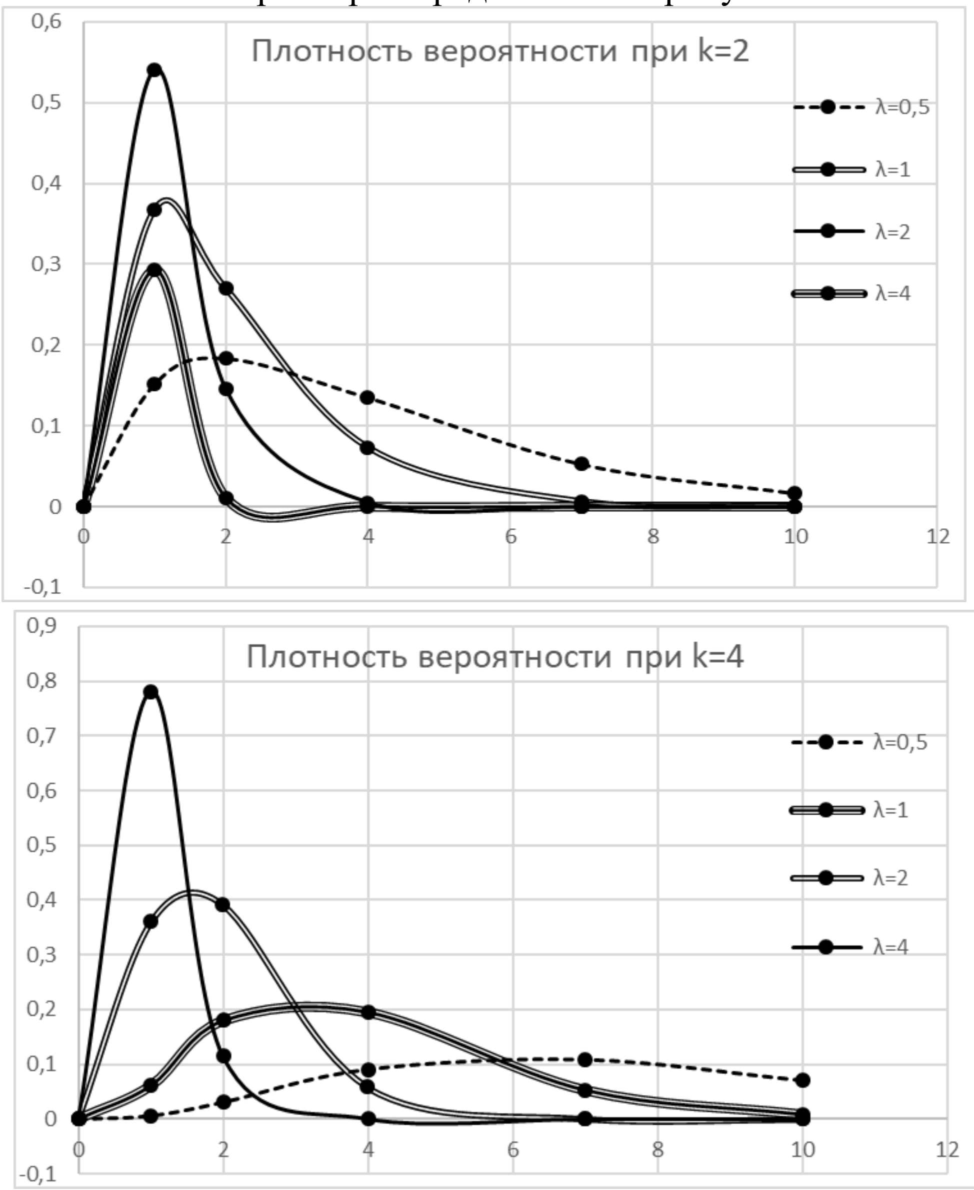

Рис.1. Плотность вероятности распределения Эрланга.

Заметим, что при значении параметра $k=1$ функция плотности вероятности (7) переходит в функцию плотности вероятности для показательного закона. В случае, если параметр k не является целым числом, $k\to a,$ закон называют гамма-распределением, функция плотности вероятности которого имеет вид

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x},$$

где $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t} dt -$ специальная гамма-функция. Гамма-распределение находит широкое применение в теории надежности [1,2].

Список литературы:

1. Гнеденко, Б.В. Математические методы в теории надежности/ Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. // М.: Наука, 1965. - 524 с.
2. Байхельт, Ф. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход / Ф. Байхельт, П. Франкен // М.: Радио и связь, 1988. - 388 с.
3. Венцель, Е.С. Прикладные задачи теории вероятностей / Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. // М.: Радио и связь, 1983.- 415с.
4. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей /Е.С. Вентцель // М: ВЫСШАЯ ШКОЛА. − 576 с.
5. Сидоров Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного // Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.// М: Наука, 1989. - 477 с.