УДК 519.86

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО И МИНИМАЛЬНОГО УРОВНЕЙ НАЦИОНАЛЬНОГО ДОХОДА В МОДЕЛИ САМУЭЛЬСОНА-ХИКСА В СЛУЧАЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики
Фаляхов Р.Ф., студент гр. ОУБ-181, I курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева г. Кемерово

В работе ставится и решается следующая практически значимая задача, актуальность которой несомненна: найти максимальный и минимальный уровни национального дохода, описываемого в модели экономического роста Самуэльсона-Хикса разностным уравнением (РУ) вида [1]

$$y^t = (a+v)y^{t-1} - vy^{t-2} + b, t = 2,3 \ldots, \qquad (1)$$

где Y^t – это национальный доход (валовый [выпуск) в период t, а параметры $\nu > 0$ – фактор акселерации, $0 < a < 1$ – склонность к потреблению, $b > 0$ – базовое потребление соответственно. Напомним, что для решения уравнения (1) требуется, согласно [2,3], найти корни соответствующего алгебраического уравнения 2-ой степени вида

$$\lambda^2 = (a+v)\lambda - v, \qquad (2)$$

называемого характеристическим. Здесь исследуется случай, когда дискриминант $D = (a+\nu)^2 - 4\nu$ уравнения (2) отрицателен, т.е. указанное уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2} = (a+\nu \pm i\sqrt{-D})/2$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Несложно показать, что тогда общее решение РУ (1) таково [2]:

$$y^t = r^t(\alpha_1 cos\varphi t + \alpha_2 sin\varphi t) + C\ , t = 0,1, \ldots, \qquad (3)$$

причем

$$\begin{cases} \lambda_1 = A + \mathrm{i}B = r(cos\varphi + \mathrm{i}sin\varphi) \\ \lambda_2 = A - \mathrm{i}B = r(cos\varphi - \mathrm{i}sin\varphi) \end{cases}. \qquad (4)$$

Здесь

$$\begin{cases} r = \sqrt{A^2+B^2} \\ tg\varphi = \frac{B}{A} \end{cases}, \qquad (5)$$

$C = b/(1-a), \alpha_1, \alpha_2 \in R$ – действительные коэффициенты, определяемые из дополнительных условий, например, относительно начальных значений уровней национального дохода y^0, y^1 в периоды *t=0;1*.

Для наглядности описанного алгоритма решения РУ (1) далее используем следующие модельные данные:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4};\ \nu = 1/4;\ b = 5/2 - \sqrt{3};\ y^0 = 4;\ y^1 = 2.$$

Тогда РУ (1) примет вид

$$y^t = \frac{\sqrt{3}}{2} y^{t-1} - \frac{1}{4} y^{t-2} + \left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\right), t = 2,3 \ldots, \quad (1')$$

а отвечающее ему характеристическое уравнение (2) таково

$$\lambda^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + \frac{1}{4} = 0. \quad (2')$$

Т.к. дискриминант D=$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4} < 0$, то комплексные корни уравнения (2') равны

$$\lambda_1 = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{i}; \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{i}.$$

Тогда, в силу (4),

$$\begin{cases} A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ B = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

откуда следует с учетом (5), что

$$r = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{1}{2}; \varphi = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Подставляя

$$C = b/(1-a) = \frac{\frac{5}{2} - \sqrt{3}}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{5}{2} - \sqrt{3}}{\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$$

и найденные значения $r = \frac{1}{2}; \varphi = \frac{\pi}{6}$ в выражение (3), преобразуем его к виду

$$y^t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\alpha_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) t + \alpha_2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) t\right) + 2, \ t = 0,1, \ldots \quad (3')$$

Принимая во внимание, что начальные уровни национального дохода равны $y^0 = 4; y^1 = 2$, при *t=0;1* из (3') найдем $\alpha_1 = 2; \alpha_2 = -2\sqrt{3}$.

Тогда формулу (3') запишем в следующей форме:

$$y^t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(2\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) - 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right) + 2, t = 0,1 \ldots$$

или

$$y^t = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \sin\left(\frac{\pi(t-1)}{6}\right)\right), t = 0,1,2 \ldots \quad (3'')$$

Для определения максимального и минимального уровней национального дохода Y^{max} и Y^{min} рассмотрим функцию

$$f(t) = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} sin\frac{\pi(t-1)}{6}\right], t \geq 0 \quad (3''')$$

того же вида, что и (3''), где *t* является непрерывно меняющимся аргументом. Найдем ее производную

$$f'(t) = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi(t-1)}{6}\right) + cos\frac{\pi(t-1)}{6} \times \frac{\pi}{6}\right] =$$

$$= -4\left(\frac{1}{2}\right)^{t}\left[-(ln2)sin\frac{\pi(t-1)}{6}+\frac{\pi}{6}cos\frac{\pi(t-1)}{6}\right].$$

Т.о.,

$$f\acute{(}t) = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{t}\left[-(ln2)sin\frac{\pi(t-1)}{6}+\frac{\pi}{6}cos\frac{\pi(t-1)}{6}\right]. \qquad (6)$$

Найдём стационарные точки функции *f(t)*:

$$f\acute{(}t) = 0 \quad \text{или} \quad (ln2)sin\frac{\pi(t-1)}{6} = \frac{\pi}{6}cos\frac{\pi(t-1)}{6} \Rightarrow$$

$$tg\frac{\pi(t-1)}{6} = \frac{\pi}{6ln2}, \qquad (6')$$

откуда имеем

$$\frac{\pi(t-1)}{6} = arctg\left(\frac{\pi}{6ln2}\right)+\pi m, m\in z \Rightarrow t_m - 1 = \frac{6}{\pi}arctg\left(\frac{\pi}{6ln2}\right)+6m.$$

Следовательно,

$$t_m = \frac{6}{\pi}arctg\left(\frac{\pi}{6ln2}\right)+(6m+1), m\in z\,. \qquad (7)$$

При $m = 0$ из (7) получаем:

$$t_0 = \frac{6}{\pi}arctg\left(\frac{\pi}{6ln2}\right)+1 \approx 2.2355719. \qquad (8)$$

Тогда (7) перепишем в виде:

$$t_m = t_0 + 6m, m\in z. \qquad (7')$$

Т.к. $t \geq 0,$ то $t_m \geq 0 \Rightarrow t_0 + 6m \geq 0,$ откуда с учетом (8)имеем

$$m \geq -\frac{t_0}{6} = -\frac{1}{\pi}arctg\left(\frac{\pi}{6ln2}\right)-\frac{1}{6} \approx -0.3726.$$

Т.о., $m \geq -0.3726,$ т.е. $m \geq 0.$ Т. к. $m \in z,$ то $m \in NU\{0\},$ откуда следует, что (7’) заменяется на выражение

$$t_m = t_0 + 6m, m \in NU\{0\}, \qquad (7'')$$

где t_0 определяется из (8).

Т. к. $2 < t_0 < 3,$ то $1 < t_0 - 1 < 2,$ откуда следует

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi(t_0-1)}{6} < \frac{\pi}{3} \qquad (9)$$

значит,

$$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) < sin\frac{\pi(t_0-1)}{6} < \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда

$$sin\frac{\pi(t_0-1)}{6} > 0. \qquad (9')$$

Подставляя (7’’) в (3’’’), запишем

$$\overline{f^m} = f(t_m) = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{t_0-1+6m} sin\frac{\pi(t_0-1+6m)}{6}\right] =$$

$$= 2[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{t_0-1+6m}(-1)^m sin\frac{\pi(t_0-1)}{6}], m\in NU\{0\}\text{ , т.е.}$$

$$\overline{f^m} = 2[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{t_0-1+6m}(-1)^m sin\frac{\pi(t_0-1)}{6}], m\in NU\{0\}. \qquad (10)$$

При $m = 2k$ (чётном), $k = 0,1,\ldots$, из (10) имеем:

$$\overline{f^{\,2k}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{t_0-1+12k} sin\frac{\pi(t_0-1)}{6}\right] < 2\forall k = 0,1,\ldots,$$

по условию (9’).

Аналогично при $m = 2k + 1$ (нечётном), $k = 0.1, \dots$, из (10) получим

$$\overline{f^{2k+1}} = 2\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{t_0+5+12k} sin\frac{\pi(t_0-1)}{6}\right] > 2\forall k = 0,1,\dots$$

в силу (9’).

$$\text{Т. к.}\,\overline{f^{2k}} < 2 < \overline{f^{2k+1}}, \text{то}\;\overline{f^{2k}} < \overline{f^{2k+1}},$$

откуда следует, что

$$\overline{f^{2k}} - \text{значение функции}\; f(t)\; \text{в точке}\; min,$$

а

$$\overline{f^{2k+1}}\;\text{в точке}\; max\;\forall k = 0,1,\dots,$$

т.е. t_m – точка минимума при четном $m\ (m = 2k)$ и точка максимума при нечетном $m\ (m = 2k + 1)$

Можно показать более строго, что $\overline{f^{2k}}$ и $\overline{f^{2k+1}}$ – значения функции $f(t)$ в точках min и max соответственно. Действительно, пусть

$$\overline{t_m} = \frac{t_m + t_{m+1}}{2} -$$

середина интервала $(t_m; t_{m+1})(m = 0.1, \dots)$, т. е. $t_m < \overline{t_m} < t_{m+1}$. Тогда, согласно (7’’),

$$\overline{t_m} = \frac{t_0+6m)+t_0+6(m+1)}{2} = t_0 + 6m + 3.$$

Итак,

$$\overline{t_m} = t_0 + 6m + 3, m \in NU\{0\}. \qquad (7’’’)$$

Подставляя (7’’’) в (6), запишем

$$\acute{f}\left(\overline{t_m}\right) = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{\overline{t_m}}\left[-(ln2)sin\frac{\pi\left(\overline{t_m}-1\right)}{6} + \frac{\pi}{6}cos\frac{\pi\left(\overline{t_m}-1\right)}{6}\right] =$$

$$= -4\left(\frac{1}{2}\right)^{\overline{t_m}}\left[-(ln2)sin\left\{\frac{\pi(t_0-1)}{6} + \left(\pi m + \frac{\pi}{2}\right)\right\} + \frac{\pi}{6}cos\left\{\frac{\pi(t_0-1)}{6} + \left(\pi m + \frac{\pi}{2}\right)\right\}\right].$$

Учитывая, что

$$sin(\pi m + \tfrac{\pi}{2}) = (-1)^m => cos^2\left(\pi m + \tfrac{\pi}{2}\right) = 0 => \cos\left(\pi m + \tfrac{\pi}{2}\right) = 0,$$

последнее выражение преобразуем к виду

$$\acute{f}\left(\overline{t_m}\right) = 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\overline{t_m}}(-1)^m\left[(ln2)cos\tfrac{\pi(t_0-1)}{6} + \tfrac{\pi}{6}sin\tfrac{\pi(t_0-1)}{6}\right]. \qquad (11)$$

Т. к. справедливо (9), то $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = cos\dfrac{\pi}{6} > cos\dfrac{\pi(t_0-1)}{6} > cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} =>$

$$=> cos\frac{\pi(t_0-1)}{6} > 0.$$

Т. к.

$$ln2 > 0(2 > 1 => ln2 > ln1 = 0), \text{и}\;\left(\frac{1}{2}\right)^{\overline{t_m}} > 0,$$

то $\acute{f}\ (\overline{t_m})$ того же знака, что $(-1)^m$, т. е. $sgn[\acute{f}\ (\overline{t_m})] = (-1)^m$, что равносильно условиям

$$\begin{cases} \acute{f}\left(\overline{t_m}\right) > 0, m - \text{чётно} \\ \acute{f}\left(\overline{t_m}\right) < 0, m - \text{нечётно} \end{cases} (m=0,1,\ldots). \qquad (12)$$

Кроме того, поскольку

$$\acute{f}(1) = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{\pi}{6} < 0,$$

то $\acute{f}(t) < 0$ на интервале $t \in [0; t_0)$ (см. рис.1).

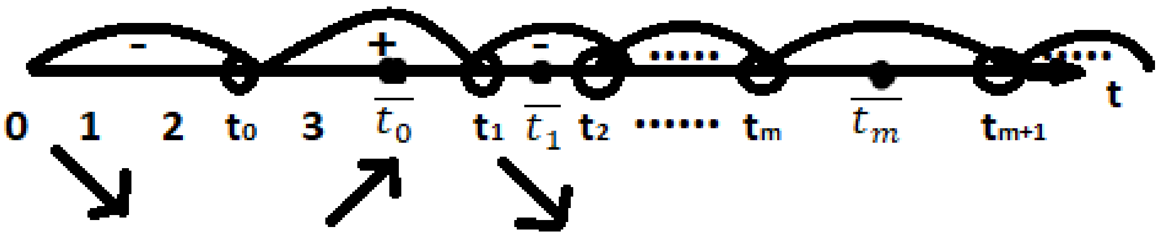

Рис.1. Точки экстремума функции $f(t) = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} sin\frac{\pi(t-1)}{6}\right], t \geq 0$

$\text{Т. о., если } m - \text{чётно, то } \overline{f^m} = \overline{f^{2k}} - \text{локальный минимум } f(t);$
$\text{При } m - \text{нечётном } \overline{f^m} = \overline{f^{2k+1}} - \text{локальный максимум } f(t).$

Рассмотрим разность

$$\overline{f^{2k}} - \overline{f^{2(k+1)}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t_m - 1 + 12k} sin\frac{\pi(t_0 - 1)}{6}\right] - 2[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t_m + 12k + 11} \times$$
$$\times \sin\left[\frac{\pi(t_0 - 1)}{6}\right] = 2\sin\frac{\pi(t_0 - 1)}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{t_0 - 2 + 12k}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{12} - 1\right] < 0 \Rightarrow \overline{f^{2k}} <$$
$$< \overline{f^{2k+2}}.$$

Т.о.,

$$\overline{f^{2k}} < \overline{f^{2k+2}},$$

т.е. последовательность значений $\left\{\overline{f^{2k}}\right\}$ функции $f(t)$ в точках минимума возрастает.

С другой стороны,

$$\overline{f^{2k+1}} - \overline{f^{2k+3}} = 2\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{t_0 + 5 + 12k} sin\frac{\pi(t_0 - 1)}{6}\right] - 2[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{t_0 + 17 + 12k} \times$$
$$\times sin\frac{\pi(t_0 - 1)}{6}] = 2sin\frac{\pi(t_0 - 1)}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{t_0 + 5 + 12k}[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}] > 0 \Rightarrow \overline{f^{2k+1}} >$$
$$> \overline{f^{2k+3}}.$$

Итак,

$$\overline{f^{2k+1}} > \overline{f^{2k+3}},$$

т.е. последовательность значений $\left\{\overline{f^{2k+1}}\right\}$ функции $f(t)$ в точках максимума убывает.

Тогда наибольшее значение f^{max} функции *f(t)* на интервале $[0;+\infty)$ равно

$$f^{max} = \max_{t\in[0;+\infty)} f(t) = \max[\max_{k=0;+\infty}\overline{f^{2k+1}}; f(0); f(+\infty)] =$$
$$= \max\left[\overline{f^1}; 4; 2\right] = \max\left[\overline{f^1}; 4\right].$$

Здесь учтено, что, согласно (3’’’),

$$f(0)=4; \lim_{t\to\infty} f(t)=2, \text{ т.к. } \lim_{t\to\infty}(1/2)^{t-1}=0, \text{ а } \left|sin\frac{\pi(t-1)}{6}\right| \leq 1.$$

Принимая во внимание, что

$$\overline{f^1} = 2\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{t_0+5} sin\frac{\pi(t_0-1)}{6}\right] < 2[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{t_0+5}], \text{ а } \left(\frac{1}{2}\right)^{t_0} < \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

т. к. функция $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$ убывает $\left(\frac{1}{2}<1\right)$ и $t_0>2$, то имеем

$$\overline{f^1} < 2\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^7\right] = 2+\left(\frac{1}{2}\right)^6 < 3 < f(0)=4, \text{ т.е. } \overline{f^1} < f(0).$$

Тогда $f^{max}=f(0)=4$ и наибольший уровень национального дохода Y^{max} равен $Y^{max}=Y^0=4$.

Аналогично, наименьшее значение f^{min} функции *f(t)* на интервале $[0;+\infty)$ равно

$$f^{min} = \min_{t\in[0;+\infty)} f(t) = min\left[\min_{k=0;+\infty}\overline{f^{2k}}; f(0); f(+\infty)\right] =$$
$$= min\left[\overline{f^0}; f(0); f(+\infty)\right] = min\left[\overline{f^0}; 4; 2\right] = min\left[\overline{f^0}; 2\right].$$

По формуле (3’’’) получим:

$$\overline{f^0} = 2[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{t_0-1} sin\frac{\pi(t_0-1)}{6}\Big].$$

Т.к. t_0 удовлетворяет уравнению (6’), то имеет место тождество

$$sin\varphi = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}},$$

откуда при $\varphi=\frac{\pi(t_0-1)}{6}$ следует $sin\frac{\pi(t_0-1)}{6} = \frac{\left(\frac{\pi}{6ln2}\right)}{\sqrt{1+(\frac{\pi}{6ln2})^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^{2+}(6ln2)^2}}$, то, в силу (8), из (3’’’) найдем:

$$2[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{\pi}arctg\left(\frac{\pi}{6ln2}\right)}] \times \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+(6ln2)^2}}] \approx 1.488054756 \approx 1.488.$$

Т.о., $f^{min}=f(t_0)\approx 1.488$.

Учитывая, что в (3’’) период *t* является целым и $2<t_0<3$, наименьший уровень национального дохода Y^{min} равен $Y^{min}=min[Y^2;Y^3]$.

Из (3’’) следует, что

$$Y^2 = 2\left(1-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(1-\frac{1}{4}\right) = 2-\frac{1}{2};$$

$$Y^3 = 2\left(1-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(1-\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2-\frac{\sqrt{3}}{4} > 2-\frac{1}{2} = 1{,}5 = Y^2,$$

поскольку $\frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{2}$ в силу неравенства $\frac{3}{16} < \frac{1}{4}$. Итак, $Y^3 > Y^2$, поэтому окончательно запишем $Y^{min} = Y^2 = 1{,}5$.

В итоге максимальный и минимальный уровни национального дохода, определяемые формулой (3"), соответственно равны $Y^{max} = Y^0 = 4$; $Y^{min} = Y^2 = 1{,}5$.

График уровня дохода Y^t схематически представлен на рис. 2.

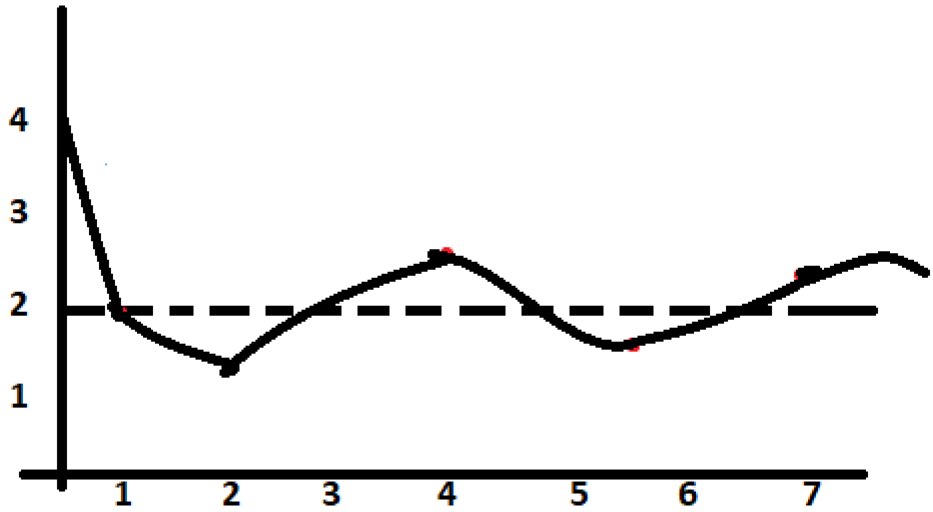

Рис.2. график зависимости уровня национального дохода от периода *t*.
$$y^t = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \sin\left(\frac{\pi(t-1)}{6}\right)\right) t = 0,1,2\ldots$$

Отметим, что зависимость (3") имеет характер затухающих по амплитуде колебаний, т.к. $r = \frac{1}{2} < 1$ и $r^t \to 0$ при $t \to \infty$. При этом график Y^t имеет горизонтальную асимптоту, т.к. $Y^{+\infty} = C = \frac{b}{1-a} = 2$.

Список литературы:

1. Математическая экономика на персональном компьютере. Под ред. М. Кубонива. – М.: Финансы и статистика, 1991. – 304 с.
2. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности.– М.: Наука, 1983.– 48 с.
3. Мешечкин В.В., Победаш П.Н. Параметрический анализ и асимптотические оценки выпусков в одной модели экономического роста.// В сб. трудов молодых ученых КемГУ, посвященный 60-летию Кемеровской области: В 2т.Т.2.Кемеровский госуниверситет.- Кемерово: Полиграф, 2002. - С.109-115.