УДК 519.86

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРОВНЕЙ НАЦИОНАЛЬНОГО ДОХОДА В МОДЕЛИ САМУЭЛЬСОНА-ХИКСА В СЛУЧАЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики
Лобанова Н.А., студент гр. ОУБ-181, I курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

В данной работе исследуем математическую модель национальной экономики, носящую в научной литературе название модели Самуэльсона-Хикса и задаваемую системой разностных уравнениями (РУ) вида [1]

$$I^{t+2} = v(Y^{t+1} - Y^{t}),\ C^{t+1} = aY^{t} + b,\ Y^{t} = I^{t} + C^{t}\ (t = 0,1,\ldots), \tag{1}$$

где соответственно показатели I^t, Y^t и C^t – это инвестиции, национальный доход (валовый выпуск) и потребление в период t, а параметры $v > 0$ – фактор акселерации, $0 < a < 1$ – склонность к потреблению, $b > 0$ – базовое потребление.

При подстановке 1-го и 2-го уравнения (1) в 3-е равенство, запишем:

$$Y^t = v(Y^{t-1} - Y^{t-2}) + a\,Y^{t-1} + b = (a + v)Y^{t-1} - vY^{t-2} + b.$$

В итоге уравнение динамики национального дохода задается в виде РУ 2-го порядка

$$y^t = (a + v)y^{t-1} - vy^{t-2} + b, t = 2,3\ldots \tag{2}$$

Найдем явную формулу для национального дохода y^t. Для простоты и наглядности излагаемый здесь алгоритм решения уравнения (2) проиллюстрируем на модельных данных, удовлетворяющих условиям:

$$v = 1/4; a + v = \sqrt{3v};\ b = 5/2 - \sqrt{3};\ y^0 = 4; y^1 = 2.$$

Из 2-го условия следует, что

$$a + v = \sqrt{3v} = \sqrt{3 \times \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ или } a = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}.$$

Подставляя значения параметров в РУ (2), запишем

$$y^t = \frac{\sqrt{3}}{2}y^{t-1} - \frac{1}{4}y^{t-2} + \left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\right), t = 2,3\ldots \tag{2'}$$

Согласно [2], характеристическое уравнение, соответствующее РУ (2), имеет вид:

$$\lambda^2 = (a + v)\lambda - v. \tag{3}$$

Тогда решение уравнения (2) определяется выражением

$$Y^t = \alpha_1\lambda_1^t + \alpha_2\lambda_2^t + C,\ t = 0,1,\ldots, \tag{4}$$

где $C = b/(1 - \sum_{i=0}^{k-1} a_i)$, a_i - коэффициенты РУ (2), $k=2$ – порядок РУ (2),

$\lambda_{1,2} = (a+\nu \pm i\sqrt{-D})/2$, корни характеристическое уравнения (3), $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица, дискриминант уравнения (3) равен $D=(a+\nu)^2-4\nu$. Подставляя исходные значения параметров, запишем характеристическое уравнение (3) примет вид

$$\lambda^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda - \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad \lambda^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + \frac{1}{4} = 0.$$

При этом

$$\text{D}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4} < 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}\text{i}; \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}\text{i}.$$

Поскольку

$$a_0 = a + v = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad a_1 = -v = -\frac{1}{4};$$

$$a_0 + a_1 = \sum_{\iota=0}^{k-1} a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} \neq 1,$$

то

$$c = b/(1 - \sum_{\iota=0}^{k-1} a_1) = \frac{\frac{5}{2}-\sqrt{3}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{5}{2}-\sqrt{3}}{\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\left(\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\ .$$

Итак, *C=2.*

Тогда, в соответствии с выражением (4), получаем явную формулу для национального дохода y^t:

$$y^t = \alpha_1\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\iota}{4}\right)^t + \alpha_2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\iota}{4}\right)^t + 2, \quad t = 0,1\ldots, \tag{5}$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \,\epsilon\, \mathrm{C}$ – комплексные коэффициенты. Преобразуем выражение (5), представив комплексные корни λ_1, λ_2 в тригонометрической форме:

$$\begin{cases}\lambda_1 = A + \text{i}B = r(cos\varphi + \text{i}sin\varphi)\\ \lambda_2 = A - \text{i}B = r(cos\varphi - \text{i}sin\varphi)'\end{cases} \tag{6}$$

где

$$\begin{cases} r = \sqrt{A^2+B^2} \\ tg\varphi = \frac{B}{A}\end{cases} \tag{7}$$

С учетом (6), (7) запишем

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\iota}{4} = A + \text{i}B,$$

то есть

$$\begin{cases} A = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ B = \dfrac{1}{4}\end{cases},$$

откуда

$$r = \sqrt{\frac{3}{16}+\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}.$$

Так как

$$cos\varphi = \frac{A}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \text{ и } sin\varphi = \frac{B}{r} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} > 0,$$

то

$$\varphi = arctg\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Т.о., $r = \frac{1}{2};\ \ \varphi = \frac{\pi}{6},$ поэтому найдем

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right);\ \ \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Тогда выражение (5), в силу формулы Эйлера

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi},$$

примет вид:

$$y^t = \alpha_1((\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^t +$$
$$+\alpha_2\ (\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^t + 2 \quad t = 0,1,.. \qquad (8)$$

Применяя формулу Муавра

$$\left(r[\cos\varphi + i\sin\varphi]\right)^t = r^t[\cos\varphi t + i\sin\varphi t]\,(t = 0,1,...),$$

перепишем выражение (8) в виде

$$y^t = \alpha_1\left(\frac{1}{2}\right)^t (\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)) + \alpha_2\left(\frac{1}{2}\right)^t\left(\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right) + 2. \quad (8')$$

Отметим, что в общем виде при D<0 формула (4) для y^t имеет вид:

$$y^t = r^t\left(\alpha_1(cos\varphi t + \mathrm{i}sin\varphi t) + \alpha_2(cos\varphi t - \mathrm{i}sin\varphi t)\right) + C,\ t = 0,1\ ... \qquad (9)$$

Т.к. α_1, α_2 – комплексные числа, то их можно представить в следующей форме:

$$\begin{cases}\alpha_1 = \mathrm{C}_1 + \mathrm{i}d_1\\ \alpha_2 = C_2 + \mathrm{i}d_2,\end{cases} \qquad (10)$$

где $\mathrm{C}_1, C_2, d_1, d_2 \in \mathcal{R}$ - вещественные числа.

Подставляя (10) в (9), получим:

$$y^t = r^t\left(\{\mathrm{C}_1 + \mathrm{i}d_1\}(cos\varphi t + \mathrm{i}sin\varphi t) + \{C_2 + \mathrm{i}d_2\}(cos\varphi t - \mathrm{i}sin\varphi t)\right) + C=$$
$$= r^t[\{(\mathrm{C}_1cos\varphi t - d_1sin\varphi t) + (C_2cos\varphi t + d_2sin\varphi t)\} +$$
$$+i\{(\mathrm{C}_1sin\varphi t + d_1cos\varphi t) + (-C_2sin\varphi t + d_2cos\varphi t)\}] + C =$$
$$= r^t[\{(C_1 + C_2)cos\varphi t + (d_2 - d_1)sin\varphi t\} +$$
$$+i\{(d_1 + d_2)cos\varphi t + (\mathrm{C}_1 - C_2)sin\varphi t\}] + C.$$

Т.о., получили

$$y^t = r^t[\{(\mathrm{C}_1 + C_2)cos\varphi t + (d_2 - d_1)sin\varphi t\} +$$
$$+i\{(d_1 + d_2)cos\varphi t + (\mathrm{C}_1 - C_2)sin\varphi t\}] + C. \qquad (9')$$

Т.к. $C, y^t \in \mathcal{R}\ \ \forall t = 0,1\ ...$, то

$$(d_1 + d_2)cos\varphi t + (\mathrm{C}_1 - C_2)sin\varphi t = 0\ \forall t = 0,1\ ... \qquad (11)$$

Подставляя в (11) $t = 0$, получим

$$d_1 + d_2 = 0,\ \text{т.е. } d_2 = -d_1 \qquad (12)$$

откуда следует, в силу (11), что $(C_1 - C_2) sin\varphi t = 0 \ \forall t = 0,1 \ldots$

Подставляя в последнее равенство $t = 1$, получим:
$(C_1 - C_2) sin\varphi = 0$, что равносильно $C_1 = C_2$ или $sin\varphi = 0$.
Если $sin\varphi = 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathcal{R}$- вещественные корни. Следовательно, $D = 0$, а это противоречит тому, что $D < 0$. Поэтому $sin\varphi \neq 0$ и тогда

$$C_1 = C_2. \tag{13}$$

С учетом (12) и (13) (9') перепишем следующим образом:

$$y^t = r^t(2C_1 cos\varphi t - 2d_1 sin\varphi t) + C \ , t = 0,1,2, \ldots,$$

или, обозначая для единообразия $\alpha_1 = 2C_1; \quad \alpha_2 = -2d_1$, получаем

$$y^t = r^t(\alpha_1 cos\varphi t + \alpha_2 sin\varphi t) + C \ , t = 0,1, \ldots \tag{14}$$

Т.о., формула (14) дает решение уравнения (2) при условии, что дискриминант

$$D = (a + v)^2 - 4v < 0,$$

где r и φ определяются из (7).
Подставляя в (14) $r = \frac{1}{2}$ и $\varphi = \frac{\pi}{6}$, получим:

$$y^t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\alpha_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) t + \alpha_2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) t\right) + 2, \ t = 0,1, \ldots \tag{15}$$

Найдем коэффициенты α_1 и α_2.
При $t = 0$ из (15) имеем: $y^0 = \alpha_1 + 2 = 4$, откуда $\alpha_1 = 2$.
Тогда при $t = 1$ из (15) получим

$$y^1 = \frac{1}{2}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) + 2 = 2,$$

откуда следует

$$\alpha_2 = -2\sqrt{3} \ ,$$

поэтому (15) примет вид:

$$y^t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(2\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) - 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right) + 2 \ , t = 0,1 \ldots$$

Последнюю формулу перепишем так:

$$y^t = 4\left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right) + 2$$

или так как

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}; \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

в следующей форме:

$$y^t = \varphi\left(\frac{1}{2}\right)^t (\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(\frac{\pi t}{6})) + 2$$

или, учитывая тождество

$$sin\alpha cos\alpha - cos\alpha sin\alpha = \sin(\alpha - \beta) \ , \quad \text{где } \alpha = \frac{\pi}{6}; \ \beta = \frac{\pi t}{6},$$

получим

$$y^t = 4\left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right) + 2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{t}} sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi t}{6}\right) + 2 =$$

$$= 2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^t \sin\left(\frac{\pi(t-1)}{6}\right) = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \sin\left(\frac{\pi(t-1)}{6}\right)\right).$$

Т.о., окончательно получаем:

$$y^t = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \sin\left(\frac{\pi(t-1)}{6}\right)\right) t = 0,1,2 \qquad (16)$$

В частности, например, при *t=10* по формуле (16) найдем уровень национального дохода через 10 периодов:

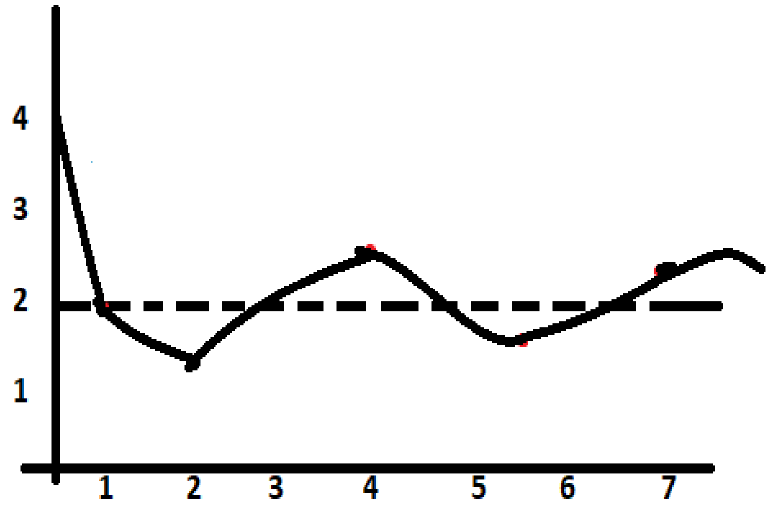

Рис.1. График зависимости уровня национального дохода от периода *t.*

$$y^t = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \sin\left(\frac{\pi(t-1)}{6}\right)\right) \quad t = 0,1,2\ldots$$

$$y^{10} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 \sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right) = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 2\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^9\right) = 2 +$$

$$+\left(\frac{1}{2}\right)^8 = 2\frac{1}{256} = \frac{513}{256} \approx 2{,}004.$$

Т.о. $y^{10} \approx 2{,}004.$

Отметим, что график зависимости уровня национального дохода от периода t, задаваемой выражением (16), приведен на рис. 1. Он имеет вид затухающих по амплитуде колебаний национального дохода. Это объясняется, тем, что показатель $r = \frac{1}{2} < 1$.

Список литературы:

1. Математическая экономика на персональном компьютере. Под ред. М. Кубонива. – М.: Финансы и статистика, 1991. – 304 с.
2. Мешечкин В.В., Победаш П.Н. Параметрический анализ и асимптотические оценки выпусков в одной модели экономического роста.// В сб. трудов молодых ученых КемГУ, посвященный 60-летию Кемеровской области: В 2т.Т.2.Кемеровский госуниверситет.- Кемерово: Полиграф, 2002. - С.109-115.