УДК 519.86

О КОНЕЧНЫХ СУММАХ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики
Гутова Е.В., ст. преподаватель кафедры математики
Протасова Н.Е., студентка гр. ФКмоз-181, I курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

Актуальность применения новых методических подходов к выводу математических результатов в математике в целом и в теории чисел в частности несомненна, даже если эти результаты уже известны. Новый метод вывода или доказательства позволяет по-новому взглянуть на рассматриваемую проблему, выявить междисциплинарные связи между разделами самой математики либо сделать этот вывод проще по сравнению с уже существующими. В данной работе предлагается новая методическая идея для вывода формулы конечных сумм целых неотрицательных степеней натуральных чисел (а также числа 0) вида

$$s_m(n)=\sum_{k=0}^{n-1}k^m \ (m=0,1,...;n=0,1,...)\,, \tag{1}$$

где полагаем, что $\sum\limits_{k=0}^{-1}k^m=0\ (m=0,1,...)$, т.е. получим $s_m(0)=0\ (m=0,1,...)$. Отметим, что формулу (1) нетрудно преобразовать к виду

$$s_m(n)=\begin{cases}1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^m \ (m=0;n=1,2,...)\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}k^m \ (m=1,2,...;n=1,2,...)\end{cases}, \tag{1'}$$

поскольку $0^m=\begin{cases}1, m=0\\ 0, m=1,2,...\end{cases}$. Поэтому задача нахождения общего аналитического выражения для конечной суммы вида (1) эквивалентна задаче поиска формулы для суммы натуральных .чисел в целой неотрицательной степени в формуле (1’).

Рассмотрим вспомогательную сумму геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{n-1}e^{kt} \ (n=0,1,...) \tag{2}$$

со знаменателем $q=e^t$. Тогда формула (2) примет вид

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kt} = \frac{e^{nt}-1}{e^t-1} \ (n=0,1,...) . \tag{2'}$$

Дифференцируя *m* раз обе части соотношения (2’) по *t*, получим

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{kt}\right)^{(m)} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{kt})^{(m)} = \sum_{k=0}^{n-1} k^m e^{kt} = \left(\frac{e^{nt}-1}{e^t-1}\right)^{(m)},$$

т.е.

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m e^{kt} = \left(\frac{e^{nt}-1}{e^t-1}\right)^{(m)} \ (m=0,1,...;n=0,1,...) . \tag{3}$$

Представим правую часть формулы (3) в следующей форме:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m e^{kt} = \left(\frac{t}{e^t-1} \times \frac{e^{nt}-1}{t}\right)^{(m)} \ (m=0,1,...;n=0,1,...) . \tag{3'}$$

Справедливы следующие разложения в ряды Маклорена:

$$\varphi(t) = \frac{t}{e^t-1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{B_\lambda t^\lambda}{\lambda!}; \tag{4}$$

$$e^{nt} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(nt)^r}{r!} \ (n=0,1,...),$$

где B_λ - числа Бернулли [1], определяемые выражением (по построению ряда Маклорена)

$$B_\lambda = \varphi^{(\lambda)}(0) = \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{(\lambda)}(0) \ (\lambda=0,1,...) . \tag{4'}$$

Из второй формулы (4) следует

$$f(t) = \frac{e^{nt}-1}{t} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n^r t^{r-1}}{r!} \ (n=0,1,...). \tag{5}$$

Делая замену $\mu = r-1 = 0;1;... \Rightarrow r = \mu+1$, из формулы (5) получим

$$f(t) = \frac{e^{nt}-1}{t} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{n^{\mu+1} t^\mu}{(\mu+1)!} \ (n=0,1,...). \tag{5'}$$

Согласно [2], имеет место формула Лейбница

$$(\varphi(t) f(t))^{(m)} = \sum_{\lambda=0}^{m} C_m^\lambda \varphi^{(\lambda)}(t) f^{(m-\lambda)}(t) \ (m=0,1,...) . \tag{6}$$

Тогда, применяя формулу (6) к соотношению (3’), найдем

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m e^{kt} = \sum_{\lambda=0}^{m} C_m^\lambda \varphi^{(\lambda)}(t) f^{(m-\lambda)}(t) \ (m=0,1,...;n=0,1,...), \tag{7}$$

где функции $\varphi(t)$ и $f(t)$ определяются формулами (4) и (5) соответственно. В частности, при *t=0* из (7) следует

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \sum_{\lambda=0}^{m} C_m^\lambda \varphi^{(\lambda)}(0) f^{(m-\lambda)}(0) \ (m=0,1,...;n=0,1,...) . \tag{7'}$$

С другой стороны, из формул (4') и (5') найдем (в силу разложения функции $f(t)$ в ряд Маклорена)

$$\varphi^{(\lambda)}(0) = B_\lambda \ (\lambda = 0,1...); \ f^{(\mu)}(0) = \frac{n^{\mu+1}}{\mu+1} \ (\mu = 0,1,...). \tag{8}$$

При $\mu = m - \lambda$ из второго соотношения (8) следует

$$f^{(m-\lambda)}(0) = \frac{n^{m-\lambda+1}}{m-\lambda+1} \ (\lambda = 0,...,m). \tag{9}$$

Подставляя первую формулу (8) и (9) в (7'), имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \sum_{\lambda=0}^{m} C_m^\lambda B_\lambda \frac{n^{m-\lambda+1}}{m-\lambda+1} \ (m = 0,1,...; n = 0,1,...).$$

Т.о., получили формулу, позволяющую определять конечные суммы целых неотрицательных степеней натуральных чисел

$$s_m(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^m = \sum_{\lambda=0}^{m} C_m^\lambda B_\lambda \frac{n^{m-\lambda+1}}{m-\lambda+1} \ (m = 0,1,...; n = 0,1,...). \tag{10}$$

Отметим, что формула (10) равносильна формуле, приведенной в [1]:

$$(m+1)s_m(n) = (m+1)\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \sum_{\lambda=0}^{m} C_{m+1}^\lambda B_\lambda n^{m-\lambda+1} \ (m = 0,1,...; n = 0,1,...). \tag{11}$$

Действительно, из (11) следует, что

$$s_m(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{\lambda=0}^{m} C_{m+1}^\lambda B_\lambda n^{m-\lambda+1} = \sum_{\lambda=0}^{m} \frac{(m+1)!}{(m+1)\lambda!(m+1-\lambda)!} B_\lambda n^{m-\lambda+1} =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{m} \frac{m!}{\lambda!(m+1-\lambda)(m-\lambda)!} B_\lambda n^{m-\lambda+1} = \sum_{\lambda=0}^{m} C_m^\lambda B_\lambda \frac{n^{m-\lambda+1}}{m-\lambda+1}$$

$(m = 0,1,...; n = 0,1,...)$, т.е. вновь получили формулу (10).

Отметим, что предложенный в данной статье подход, в отличие от метода, изложенного в работе [1], позволяет не рассматривать произведение рядов, ограничиваясь лишь разложениями функций $\varphi(t)$ и $f(t)$ в ряд Маклорена (см. (4) и (5')).

С учетом представления для суммы $s_m(n)$ в виде (1'), от формулы (10) нетрудно перейти к выражению суммы $A_m(n)$ целых неотрицательных степеней натуральных чисел вида

$$A_m(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k^m = \begin{cases} n-1 \ (m = 0; n = 1,2,...) \\ \sum_{\lambda=0}^{m} C_m^\lambda B_\lambda \frac{n^{m-\lambda+1}}{m-\lambda+1} \ (m = 1,2,...; n = 1,2,...) \end{cases}, \tag{10'}$$

поскольку $s_0(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^0 = n$, откуда следует очевидное соотношение $\sum_{k=1}^{n-1} k^0 = n-1$.

Ниже приведен пример, иллюстрирующий применение формулы (10). При этом для нахождения чисел Бернулли удобно воспользоваться их свойством, представленным следующим соотношением (см. указанную выше работу):

$$1+\sum_{\lambda=1}^{m-1} C_m^{\lambda} B_{\lambda} = 0 \; (m=2,3,...), \qquad (12)$$

которую перепишем в виде

$1+\sum_{\lambda=1}^{m-2} C_m^{\lambda} B_{\lambda} + C_m^{m-1} B_{m-1} = 0 \; (m=2,3,...)$. Из последнего условия получим рекуррентную формулу (т.к. $C_m^{m-1}=m$)

$$B_{m-1} = -\left(1+\sum_{\lambda=1}^{m-2} C_m^{\lambda} B_{\lambda}\right) / \, m \; (m=2,3,...), \qquad (12')$$

где, согласно формулы (4') при $\lambda = 0$,

$B_0 = \varphi(0) = \lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{e^t-1}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{(t)'}{(e^t-1)'} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{e^t} = 1$, т.е. $B_0 = 1$. В данном случае для вычисления предела применили правило Лопиталя. При этом полагаем, что по определению $\varphi^{(0)}(0) = \varphi(0)$.

Пример.1. При *m=0* из формулы (10) найдем очевидное тождество (учитывая, что $B_0 = 1$)

$$s_0(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^0 = \sum_{\lambda=0}^{0} C_0^{\lambda} B_{\lambda} \frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda} = n,$$

т.к. $k^0 = 1$.

При m=1 из (10) следует, что

$$s_1(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \sum_{\lambda=0}^{1} C_1^{\lambda} B_{\lambda} \frac{n^{2-\lambda}}{2-\lambda} = B_0 \frac{n^2}{2} + B_1 n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

поскольку, в силу (12') при *m=2* имеем: $B_1 = -\frac{1}{2}$. Здесь полагаем формально, что $\sum_{\lambda=1}^{0} C_2^{\lambda} B_{\lambda} = 0$. Справедливость полученного выше выражения $s_1(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ несложно проверить по формуле $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$, где S_n - сумма n элементов арифметической прогрессии $\{a_k\} \; (k=1,...,n)$ с начальным и конечным элементами $a_1 = 0; a_n = n-1$ соответственно и знаменателем *d=1*. Аналогично проверяется справедливость соотношения (10') при *m=1*.

Список литературы:

1. Теория чисел. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. Том 1. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высш. шк., 1988. – 712 с.