УДК 519.86

О ЧИСЛАХ ФИБОНАЧЧИ И ПРАВИЛЕ «ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ»

Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики
Гутова Е.В., ст. преподаватель кафедры математики
Николаев Ю.А., студент гр. АГс-161, III курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

Числа Фибоначчи – это последовательность чисел, каждое из которых равно сумме двух предыдущих, т.е. она описывается разностным (возвратным) уравнением вида

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ (n = 1, 2, ...), \qquad (1)$$

где a_n - n-ый элемент этой последовательности. При этом первые 2 элемента этой последовательности равны 1:

$$a_1 = a_2 = 1. \qquad (2)$$

Указанная последовательность математически связана с правилом «золотого сечения», суть которого состоит в делении чего-либо на две части таким образом, что меньшая из частей относится к большей так, как большая относится к целой величине. Опишем указанное правило математически. Обозначим x и y – соответственно большую и меньшую части объекта, который необходимо разделить на 2 части, приняв его величину за единицу. Тогда математическая модель решаемой задачи описывается условиями

$$x + y = 1, x > y > 0, \qquad (3)$$

где величины x и y удовлетворяют уравнению $\frac{y}{x} = \frac{x}{1}$ или, учитывая, что

$$y = 1 - x, \qquad (4)$$

в силу равенства (3), правило «золотого сечения» примет вид

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}, \qquad (5)$$

откуда следует, что

$$x^2 + x - 1 = 0. \qquad (5')$$

Решая квадратное уравнение (5’), найдем корни

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \qquad (6)$$

Поскольку из (6) видно, что $x_1 < 0$, а $x_2 > 0$, и по своему содержательному смыслу часть x положительна (см. первое неравенство (3)), то

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618.$$

Подставляя найденное выражение для x в (4), получим

$y = 1 - \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 1 - 0,618 = 0,382$. Т.о., большая и меньшая части, найденные по правилу «золотого сечения» определяются соответственно следующими величинами

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618; \; y = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382. \qquad (6')$$

При этом отношение λ величины всего объекта к большей его части или большей его части к меньшей, согласно «золотому сечению», задается выражением

$$\lambda = \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618.$$

В итоге отношение «золотого сечения» равно

$$\lambda = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618. \qquad (7)$$

Заметим, что если применить алгоритм решения однородных разностных уравнений, описанный в работе [1], к уравнению (1), то получим его общее решение в виде следующей формулы:

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \; (n = 1, 2, ...), \qquad (8)$$

где λ_1, λ_2 - корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 = \lambda + 1, \qquad (9)$$

т.е. (см. (6’) и (7))

$$\lambda_1 = -x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \; \lambda_2 = \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \qquad (10)$$

При *n=1* и *n=2* из (8) соответственно получим, с у четом начальных условий (2), систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_1, C_2:

$$\begin{array}{l} C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = 1 \\ C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 = 1 \end{array}. \qquad (11)$$

Учитывая уравнение (9) и выражения (10), запишем

$$\lambda_1^2 = \lambda_1 + 1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \lambda_2^2 = \lambda_2 + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \qquad (12)$$

Тогда, подставляя выражения (10) и (12) в систему (11), перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} & C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ & C_1\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{aligned}. \qquad (11')$$

Вычитая из второго уравнения (11’) первое, получим

$C_1 + C_2 = 0$, откуда следует, что

$$C_1 = -C_2. \qquad (13)$$

Подставляя выражение (13), например, в первое уравнение системы (11’), запишем

$C_2\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \sqrt{5}C_2 = 1$, откуда найдем

$C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Учитывая (13), определим $C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Итак,

$$C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}};\ C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}. \qquad (14)$$

Подставляя коэффициенты C_1, C_2 из (14) и корни λ_1, λ_2 из (10) в формулу (8), окончательно получим следующее аналитическое выражение для чисел Фибоначчи:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \ (n = 1, 2, ...). \qquad (8')$$

Отметим, что числа Фибоначчи все натуральные, в силу того, что начальные числа $a_1 = a_2 = 1$ также натуральные (см. условие (2)) и рекуррентного соотношения (1). Поэтому и числа, определяемые формулой (8’), тоже являются натуральными. Кроме того, несложно проверить непосредственной подстановкой выражения (8’), что оно удовлетворяет условиям (1) и (2).

Список литературы:

1. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности.– М.: Наука, 1983.– 48 с.