УДК 510

МЕТОД ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ХОРД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Опарина О. А., студентка гр. ИТб-172, 2 курс,
Ермакова И.А., д.т.н., профессор
Научный руководитель: Гоголин В.А., д.т.н., профессор
Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачёва
г. Кемерово

Существует метод хорд решения уравнений [1, 2]. Предлагается метод параболических хорд. Имеется ввиду замена линейной хорды на параболическую кривую. Понятно, что в этом случае уже первое приближение будет ближе к корню уравнения, чем в методе хорд.

Постановка задачи: требуется найти приближённое значение корня уравнения $f(x)=0$ на интервале [a; b]. Значения функции на концах интервала имеют разные знаки. Кривая $y=f(x)$ на [a; b] либо вогнута, либо выпукла, то есть $f''(x)>0$ или $f''(x)<0$. Возможно четыре случая, которые показаны на рис. 1.

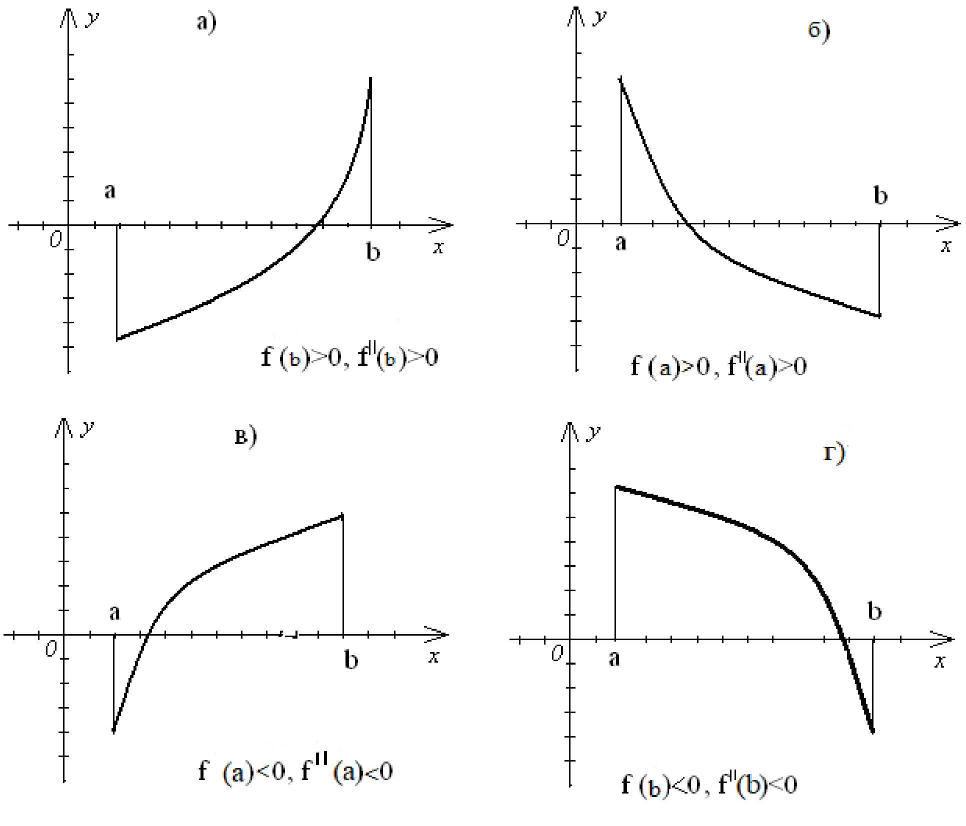

Рис. 1. Возможные случаи поведения графика функции $y = f(x)$ на интервале [a; b]

Дано уравнение $f(x)=0$. Ищем параболическую хорду, уравнение которой имеет вид: $y = Ax^2 + Bx + C$.

Найдём вторую производную функции: $f''=(Ax^2 + Bx + C)'' = 2A$.

Для того, чтобы парабола не пересекала график функции, необходимо выполнение условия:

$$2A < \min[f''(a); f''(b)]. \qquad (1)$$

Из данного условия задаем коэффициент A. Коэффициенты B, C найдем из решения системы двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} Aa^2 + Ba + C = f(a); \\ Ab^2 + Bb + C = f(b). \end{cases}$$

Данную систему с двумя неизвестными решаем любым способом. Составляем искомое уравнение параболической хорды с найденными коэффициентами и приравниваем его к нулю $Ax^2 + Bx + C = 0$.

Находим корни уравнения и выбираем первое приближение корня уравнения – корень a_1 в интервале $[a; b]$, и искомый интервал сужается до $[a_1; b]$. Процедуру повторяем до заданной точности $\Delta < |a_n - a_{n-1}|$.

Пример. Дано уравнение $x^3 - 2 = 0$ на интервале [1; 2]. Найдем его корни методом параболических хорд.

На рисунке изображён график функции $y = f(x) = x^3 - 2$ на заданном интервале.

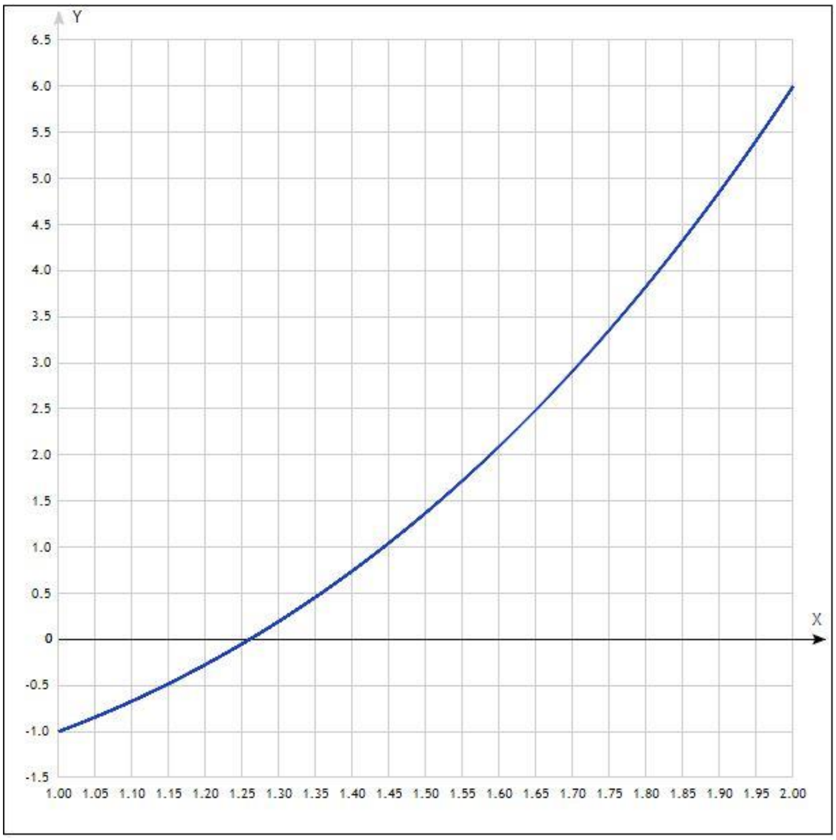

Рис. 2. График функции $y = f(x) = x^3 - 2$

Находим значения второй производной функции на границах интервала: $f''(x) = 6x;\ f(1) = 6;\ \ f(2) = 12.$

Выбираем значение коэффициента A из условия (1): $2A<6$. Пусть A = 2,9. Тогда система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} 2{,}9a^2 + Ba + C = -1 \\ 2{,}9b^2 + Bb + C = 6 \end{cases}$$

Подставим вместо a и b численные значения границ интервала, получим систему:

$$\begin{cases} 2{,}9 \cdot 1^2 + B \cdot 1 + C = -1 \\ 2{,}9 \cdot 2^2 + B \cdot 2 + C = 6 \end{cases}$$

Найдем коэффициенты B и C, запишем уравнение параболической хорды:

$$y = 2{,}9x^2 - 1{,}7x - 2{,}2\,.$$

Далее найдем корень этого уравнения, принадлежащий заданному интервалу:

$$2{,}9x^2 - 1{,}7x - 2{,}2 = 0, \quad x_1 \approx 1{,}21.$$

Это – первое приближение искомого корня уравнения. Подставим найденное значение в уравнение $y = f(x) = x^3 - 2$.

$$y = f(1{,}21) = 1{,}21^3 - 2 = 0{,}22\,.$$

Повторяем алгоритм на интервале [1,21; 2]. При заданной точности $\Delta < 0{,}01$ после трех итераций получаем решение: x = 1,26. Точное значение $x = \sqrt[3]{2} = 1{,}259$.

Список литературы:

1. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа. / А.Ф. Бермант, И.Г Араманович. – СПб.: Лань, 2005. – 736 с.

2. Тынкевич М. А. Введение в численный анализ [Текст]: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки 09.03.03 и 09.04.03 "Прикладная информатика", изучающих дисциплины "Численные методы", "Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений" / М. А. Тынкевич, А. Г. Пимонов ; ФГБОУ ВО "Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева", Кемерово: КузГТУ, 2017. – 177 с.