УДК 511.3

МОМЕНТЫ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Каракулова Ю. Ю. студентка гр. ЭРб-171, II курс
Казунина Г.А., профессор, д.т.н., доцент
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева,
г. Кемерово

Характеристическая функция, впервые введенная русским математиком А.М. Ляпуновым в 1900 году, является удобным и гибким инструментом для решения различных вероятностных задач [1], в том числе для определения моментов не только низшего порядка, но и моментов более высоких порядков. Цель настоящей работы – показать на примере законов распределения дискретных случайных величин способ определения моментов распределений при помощи характеристической функции.

Характеристической функцией $G_X(t)$ случайной величины X называется комплексная неслучайная функция действительного аргумента t, которая является математическим ожиданием комплексной случайной величины e^{itX}

$$G_X(t) = M\left[e^{itX}\right] = \sum_k e^{itx_k} P_k. \qquad (1)$$

Сопоставление разложения в ряд характеристической функции с общей формулой разложения в степенной ряд

$$G_x(t) = M\left[1 + itX + \frac{i^2t^2}{2!}X^2 + \frac{i^3t^3}{3!}X^3 \dots + \frac{i^kt^k}{k!} \dots\right] =$$

$$= 1 + itM[X] + \frac{i^2t^2}{2!}M[X^2] \dots + \frac{i^kt^k}{k!}M[X^k] \dots =$$

$$= G(0) + G'(0)t + \frac{G''(0)}{2!}t^2 + \cdots \frac{G^{(k)}(0)}{k!} \dots \qquad (2)$$

дает возможность получить следующие способы определения моментов $M[X^k]$. Во-первых, представление экспоненты в виде разложения в ряд позволяет найти начальные моменты распределения случайной $M[X^k]$ как коэффициенты при $\frac{(it)^k}{k!}$, во-вторых, моменты можно определить через значения производной характеристической функции в точке $t = 0$:

$$M[X^k] = (-i)^k G^{(k)}(0), k \geq 1. \qquad (3)$$

В качестве примера нахождения моментов случайной величины рассматриваем распределение Пуассона, для которого вероятности того, что случайная величина принимает значения $X = k = 0, 1, 2, 3, \dots$ задаются формулой

$$P(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0 .$$

Согласно определению (1) характеристическая функция имеет вид:

$$G_X(t) = M\left[e^{itk}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}}. \qquad (4)$$

Математическое ожидание или первый начальный момент получаем, используя соотношение (3):

$$M[x] = -iG'(0) = -ie^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}}\lambda e^{it}i|_{t=0} = \lambda.$$

Дисперсия определяется как второй центральный момент

$$D[x] = M[(X - M[X])^2].$$

Поэтому для ее определения вводим центрированную случайную величину $\hat{x} = X - M[x]$, характеристическая функция которой имеет вид:

$$G_{\hat{x}}(t) = M\left[e^{it(x-\lambda)}\right] = e^{-it\lambda}M\left[e^{itx}\right] = e^{-it\lambda}G_X(t) =$$
$$e^{-it\lambda}e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-it-1)}. \qquad (5)$$

Представляем в выражении (5) экспоненту e^{it} в виде разложения в ряд с точностью до бесконечно малых четвертого порядка $o(t^4)$:

$$G_{\hat{x}}(t) = e^{\lambda\left(1+it+\frac{(it)^2}{2!}+\frac{(it)^3}{3!}+\frac{(it)^4}{4!}\dots-it-1\right)} = e^{\lambda\frac{(it)^2}{2!}+\lambda\frac{(it)^3}{3!}+\lambda\frac{(it)^4}{4!}\dots}$$
$$= 1 + \lambda\frac{(it)^2}{2!} + +\lambda\frac{(it)^3}{3!} + \lambda\frac{(it)^4}{4!} + \frac{1}{2!}\lambda^2\frac{(it)^4}{4}\dots$$
$$= 1 + \lambda\frac{(it)^2}{2!} + \lambda\frac{(it)^3}{3!} + (\lambda + 3\lambda^2)\frac{(it)^4}{4!} + o(t^4).$$

Из полученного выражения согласно (2) получаем центральные моменты второго, третьего и четвертого порядков. Так центральный момент второго порядка или дисперсия совпадает для данного распределения с математическим ожиданием $D[x] = M[(X - M[X])^2] = \lambda$. Центральный момент третьего порядка $M[(X - M[X])^3] = \lambda$ также совпадает с параметром распределения λ , а коэффициент асимметрии распределения определяется выражением

$$a_x = \frac{M[(X-M[X])^3]}{\sigma^3} = \frac{\lambda}{\lambda\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Центральный момент четвертого порядка равен

$$M[(X - M[X])^4] = \lambda + 3\lambda^2.$$

В результате характеристика распределения – эксцесс определяется выражением

$$E_x = \frac{M[(X-M[X])^4]}{\sigma^4} - 3 = \frac{\lambda+3\lambda^2}{\lambda^2} - 3 = \frac{1}{\lambda}.$$

Список литературы:

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей /Е.С. Вентцель // М: ВЫСШАЯ ШКОЛА. – 576 с.