

УДК 51

ОВАЛ, ВОСЬМЕРКА, ДВА ОВАЛА

Гутова Е.В., ст. преподаватель кафедры математики
Шишкина У.А., студентка гр. ТЛб-181, I курс
Нурматов А.М., студент гр. ТЛб-181, I курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

Древние греки превозносили сферу, считая её законченной, самодостаточной, идеальной формой, лежащей в основе мироздания. Даже траектории небесных светил представляли как круговые орбиты. Однако впоследствии это суждение было опровергнуто: согласно «Первому закону Кеплера», движение планет соответствует не идеальной окружности, а другой геометрической фигуре – эллипсу. Законы Кеплера разрушили многовековую птолемееву идиллию, развенчали культ сферы.

Исследования эллипса, у которого сумма расстояний каждой точки от двух фокусов постоянна, наталкивает на мысль: а что если постоянным будет не сумма расстояний двух точек, а их произведение? И первый, кто задумался над такой идеей, был Джованни Кассини.

Целью данной работы является знакомство с замечательным математическим открытием Джованни Кассини – «овал Кассини» (Рис. 1). В работе мы рассматриваем алгебраические кривые n -го порядка, прослеживаем закономерность изменения графика кривых от значения параметров уравнения.

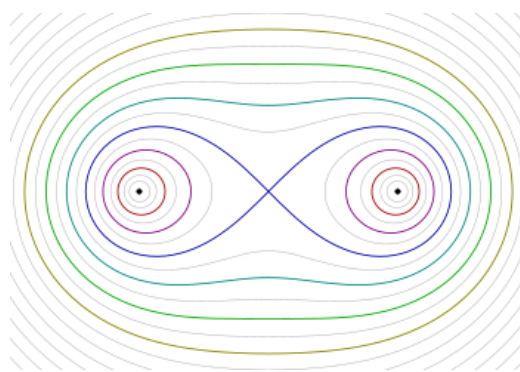


Рис. 1

Овал, восьмерка, два овала.

Алгебраической кривой n -го порядка называется график уравнения $p_n(x, y) = 0$, где $p(x, y)$ – многочлен n -ой степени от переменных x, y . Степенью многочлена называется максимальная степень входящих в него одночленов (например, многочлен $p(x, y) = x^3 + 2xy^4 + 11y^2 - xy$ имеет степень 5).

И так, алгебраическая кривая первого порядка – это прямая линия; алгебраические кривые второго порядка – это эллипс, гипербола, парабола.

Кривые более высоких порядков не полностью изучены, но тем и более интересны. Совсем недавно была решена кривая шестого порядка – это знаменитая «шестнадцатая проблема Гильберта», а для кривых больших порядков осталось много формулируемых, но нерешенных проблем. Перед тем как перейти, к примерам алгебраических прямых, рассмотрим некоторые исторические факты.

В 1876 году А. Гарнак доказал, что максимальное число овалов, из которых может состоять кривая n -го порядка, равно $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$. Следовательно, для $n=4$ получается 4 овала, для $n=6$ получается 11 овалов, для $n=8$ получается 22 овала, и т.д.

Задача об их взаимном расположении оказалась значительно сложнее. В 1900 году на Втором всемирном математическом конгрессе великий немецкий математик Д. Гильберт сформулировал знаменитые 23 проблемы, которые он считал наиболее важными для развития математики в XX века. Интересующей нас вопрос вошел в список Гильберта под номером 16, и получил название «шестнадцатая проблема Гильберта». Но полное решение получено пока для $n=6$ – это сделал советский математик Д.А. Гудков немногим около 50 лет назад.

Теперь перейдем к рассмотрению алгебраических прямых разного порядка.

Эллипс – это множество точек (на плоскости), сумма расстояний от которых до точек F_1 и F_2 постоянна: $|MF_1| + |MF_2| = 2a$.

Овалом Кассини называется множество точек (на плоскости), произведение расстояний от которых до точек F_1 и F_2 постоянно:

$$|MF_1| \cdot |MF_2| = a^2 \quad (1)$$

Точки F_1 и F_2 , в обоих случаях, называются фокусами.

«Овал Кассини» появился на свет благодаря ошибке. Его «изобрел» знаменитый французский астроном (итальянец по происхождению) Жан Доминик Кассини (1625-1712).

Этот выдающийся ученый, член Парижской академии наук, директор Парижской обсерватории, открывший вращение Юпитера и Марса, а также четыре новых спутника Сатурна, почему-то считал, что именно такую форму имеет орбита Земли. Дальнейшее развитие науки показало, что более верным ответом будет обычный эллипс. Но овал Кассини остался жить. Дело в том, что он обладает одним замечательным свойством.

Обозначим расстояние между фокусами через $2c$. и составим уравнение овала Кассини в системе координат, в которой $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

Подставляя $|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ в равенство (1) и возводя в квадрат, после преобразований получим:

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4$$

Получилось уравнение четвертой степени. Конкретный вид кривой зависит от значения параметром a и c .

Если, зафиксировать a , и увеличить c или наоборот зафиксировать c и уменьшить a , то результат будет тот же.

В этом случае, овал сначала удлинится, потом у него появится «талиа», она будет становиться все тоньше, пока, наконец, наша фигура не разорвется на две части, на два меньших овала.

При изменении c и a получим:

- 1) при $c = 0$ – окружность;
- 2) при $0 < c \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$ – выпуклый овал, похожий на эллипс;
- 3) при $\frac{a}{\sqrt{2}} < c < a$ – овал с «талией»;
- 4) при $c=a$ – «лежащая восьмерка» (она имеет отдельное название – *лемниската Бернулли*);
- 5) при $c>a$ – два овала, один из них содержит внутри точку F_1 другой – точку F_2 .

Это свойство «делимости» овалов Кассини впервые обнаружил и детально изучил другой французский ученый – Жан Поль де Гюа де Мальв (1712-1785). Его работа была одной из первых работ, посвященных исследованию особых точек алгебраических кривых (особой точкой в данном случае является точка самопересечения $c=a$). Впоследствии из таких работ появилось новое направление современной математики – алгебраическая геометрия.

В следующем примере рассмотрим множество точек M , для которых сумма величин, обратных квадратам расстояний от M до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная:

$$\frac{1}{|MF_1|^2} + \frac{1}{|MF_2|^2} = \frac{1}{b^2} \quad (2)$$

Положим $|F_1F_2| = 2c$. Подставляя в (2) формулы для $|MF_1|$ и $|MF_2|$, получаем уравнение:

$$\frac{1}{(x+c)^2+y^2} + \frac{1}{(x-c)^2+y^2} = \frac{1}{b^2} \quad (3)$$

Вид кривой, в полученном уравнении, своим поведением напоминает овал Кассини.

Рассмотрим аналогичное построение еще на одном примере.

Возьмем *тор* – поверхность, напоминающую бублик. Эта поверхность получается *вращением окружности вокруг прямой, не пересекающей ее* (и лежащей в той же плоскости, что и окружность). Пересечем тор плоскостями, параллельными друг другу и параллельными оси вращения (Рис. 2).

Если поднимать секущую плоскость снизу вверх, то увидим, что сначала сечение будет выпуклый овал, постепенно увеличивающийся в размерах. Потом овал приобретет «талию», она будет становиться все тоньше, овал превратится в восьмерку, а восьмерка распадется на два овала. В верхней части тора весь процесс повторится в обратном порядке, два овала «срастутся» в восьмерку, восьмерка превратится в овал с талией и образует в

сечении выпуклый овал. Выведем для этого уравнение тора.

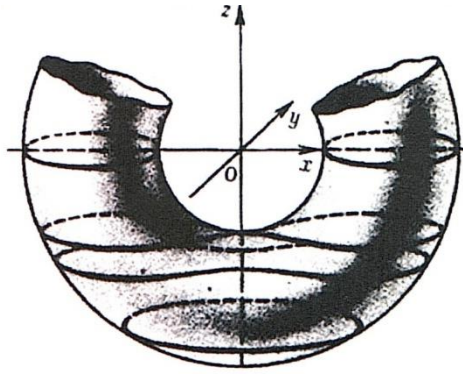


Рис. 2

Пусть оси координат направлены так, как показано на рисунке 1. Ось вращения тора совпадает с осью Oy . Пересечем тор произвольной плоскостью, проходящей через ось Oy , и рассмотрим одну из получившихся в сечении окружностей (Рис. 3):

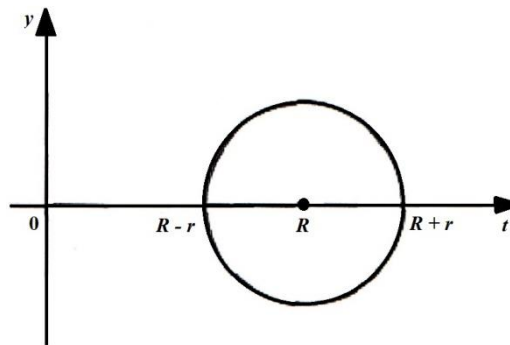


Рис. 3

Ее уравнение $(t - R)^2 + y^2 = r^2$

Здесь через r обозначим радиус окружности, а через R расстояние от ее центра до оси Oy . Если t – это расстояние от точки (x, y, z) до оси Oy , то есть $t = \sqrt{x^2 + y^2}$, значит уравнение тора равно:

$$(\sqrt{x^2 + z^2} - R)^2 + y^2 = r^2 \quad (4)$$

Если в уравнении (4) освободиться от радикалов, получится уравнение четвертой степени. Чтобы «алгебраически» пересечь тор плоскостью $z=c$ (уравнение 4) вместо z подставить c .

Впервые овал Кассини был рассмотрен в 17 веке французским ученым Джованни Кассини, который считал, что он точнее описывает орбиту Земли, чем эллипс. Построение этой фигуры возможно с использованием различных систем координат, как на плоскости, так и в пространстве.

Область применения этого овала многообразна. Например, в двухпозиционной радиолокации областью обнаружения цели является фигура, ограниченная овалом Кассини, если принят в качестве одного его фокуса позицию источника излучения, а другого – позицию приемника. Аналогично в астрономии при наблюдении астероидов, светящихся отраженным светом Солнца, условия их обнаружения при заданной

чувствительности телескопа описываются формулой овала Кассини. В этом случае границей обнаружимости будет поверхность, образованная вращением овала вокруг оси, соединяющей Солнце и наблюдателя.

Таким образом, мы расширили свой кругозор, познакомились с новыми математическими понятиями и приобрели навыки построения графиков.