УДК 511.3

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Аксенова А.А.,Савенкова Д.Е. студенты гр. ЭРб-171, II курс
Казунина Г.А., профессор, д.т.н., доцент
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева,
г. Кемерово

Возможности вероятностной оценки (предсказания) результатов массовых случайных явлений расширяются наличием группы теорем, называемых «центральной предельной теоремой». Согласно этим теоремам при суммировании достаточного большого числа случайных величин закон распределения суммы неограниченно приближается к нормальному при соблюдении некоторых условий, которые в общем виде сводятся к требованию равномерно малого влияния на сумму отдельных слагаемых [1].

Целью настоящей работы является доказательство одной из самых простых форм центральной предельной теоремы для случая одинаково распределенных слагаемых при помощи характеристической функции.

Характеристической функцией $G_X(t)$ случайной величины X называется комплексная неслучайная функция действительного аргумента t, которая является математическим ожиданием комплексной случайной величины e^{itX}

$$G_X(t) = M\left[e^{itX}\right]. \quad (1)$$

Эта функция впервые была введена русским математиком А.М. Ляпуновым в 1900 году. Для непрерывной случайной величины с плотностью вероятности распределения $f(x)$ характеристическая функция выражается как преобразование Фурье

$$G_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} dx. \quad (2)$$

Отметим некоторые свойства характеристической функции, которые будут использоваться далее. Во-первых, представление экспоненты в виде разложения в ряд позволяет найти начальные моменты распределения случайной $M[X^n]$ как коэффициенты при $\frac{(it)^n}{n!}$:

$$G_X(t) = M\left[1 + itx + \frac{(it)^2}{2!}x^2 + \frac{(it)^3}{3!}x^3 + \frac{(it)^4}{4!}x^4 \dots\dots\dots\right] =$$

$$= 1 + itM[x] + \frac{(it)^2}{2!}M[x^2] + \frac{(it)^3}{3!}M[x^3] + \frac{(it)^4}{4!}M[x^4] \dots\dots. \quad (3)$$

Во-вторых, для суммы независимых случайных величин

$$X = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

характеристическая функция определяется как произведение характеристических функций:

$$G_X(t) = M\left[e^{it(x_1+x_2+\cdots+x_n)}\right] = M\left[e^{itx_1}\right]M\left[e^{itx_2}\right]\dots . M\left[e^{itx_n}\right] = \\ = G_{x_1}(t)\cdot G_{x_2}(t)\dots G_{x_n}(t). \qquad (4)$$

Для нормированной и центрированной случайной величины $z = \frac{x-m}{\sigma}$, распределенной по нормальному закону с функцией плотности вероятности $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$, характеристическая функция согласно (2) имеет вид:

$$G_z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}e^{itz}dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}+itz}dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z^2-2itz+(it)^2)-(it)^2}{2}}dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-it)^2+t^2}{2}}dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du, \quad \text{где } u = z-2i \qquad (5)$$

С учётом того, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \sqrt{2\pi}$ (интеграл Пуассона [2]), окончательно получаем

$$G_z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}. \qquad (6)$$

Как следствие, для переменной $x = \sigma z + m$ характеристическая функция преобразуется к виду

$$G_x(t) = M\left[e^{it(\sigma z+m)}\right] = e^{imt}M\left[e^{(\sigma z)it}\right] = e^{imt}G_z(\sigma t) = e^{imt}e^{\frac{-\sigma^2 t^2}{2}}. \qquad (7)$$

Для центрированной величины $\hat{x} = x - m$ последнее выражение преобразуется как

$$G_{\hat{x}}(t) = M\left[e^{it((\sigma z+m)-m)}\right] = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \qquad (8)$$

Далее, разлагая экспоненту (8) в ряд

$$G_{\hat{x}}(t) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \frac{\sigma^4}{4}\frac{t^2}{2!} - \ldots = 1 + \sigma^2\frac{(it)^2}{2!} + 3\sigma^4\frac{(it)^4}{4!}\dots, \qquad (9)$$

и выделяя коэффициенты при $\frac{(it)^n}{n!}$, получаем центральные моменты нормального распределения. Так из выражения (9) следует, что распределение симметрично, поскольку все нечетные моменты равны нулю: $M[(X - M[X])^n],\ n = 1, 3, 5 \dots\dots$. Дисперсия определяется как второй центральный момент $M[(X - M[X])^2] = \sigma^2$, а четвертый центральный момент $M[(X - M[X])^4] = 3\sigma^4$ определяет характеристику распределения – эксцесс таким образом, чтобы для нормального распределения он был равен нулю:

$$E_{\hat{x}} = \frac{M[(x-M[x])^4]}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0. \qquad (10)$$

Далее рассматриваем $x_1, x_2 \dots x_n$ – взаимно независимые, одинаково распределенные случайные величины с параметрами:

$$M[x_k] = m\,;\ D[x_k] = \sigma^2. \qquad (11)$$

Случайная величина среднее арифметическое $\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$ имеет характеристики:

$$M[\bar{x}] = M\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}\right] = \frac{1}{n} M[\sum_{k=1}^{n} x_k] = \frac{1}{n} nm = m, \quad (12)$$

$$D[\bar{x}] = D\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}\right] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \quad (13)$$

$$\sigma[x] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (14)$$

Вводим нормированную и центрированную случайную величину

$$Y_n = \frac{\bar{x} - M[\bar{x}]}{\sigma[\bar{x}]} = \frac{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{m}{n}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - m}{\sigma\sqrt{n}}, \quad (15)$$

слагаемые которой $Y_k = \frac{x_k - m}{\sigma\sqrt{n}}$ – случайные величины с характеристиками

$$M[Y_k] = M\left[\frac{x_k - m}{\sigma\sqrt{n}}\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(M[x] - M[m]) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(m - m) = 0, \quad (16)$$

$$D[Y_k] = D\left[\frac{x_k - m}{\sigma\sqrt{n}}\right] = \frac{1}{\sigma^2 n}(D[x_k] - D[m]) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 n} = \frac{1}{n}. \quad (17)$$

Поскольку $M[Y_k] = 0$, для дисперсии получаем выражение

$$D[Y_k] = M[Y_k^2] - M^2[Y_k] = M[Y_k^2] = \frac{1}{n} \quad . \quad (18)$$

В результате характеристическая функция одного слагаемого Y_k:

$$G_{Y_k}(t) = M\left[e^{itY_k}\right] = M\left[1 + iY_k t + {Y_k}^2 \frac{(it)^2}{2!} \dots . \right] =$$
$$= 1 + M[Y_k] it + M[Y_k^2] \frac{(it)^2}{2!} + \dots = 1 + \frac{1}{n} \frac{(it)^2}{2!} + \dots \quad (19)$$

Согласно свойству (4) характеристическую функцию суммы $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ находим как произведение характеристических функций

$$G_{Y_n}(t) = (G_{Y_k}(t))^n = \left(1 + \frac{1}{n} \frac{(it)^2}{2!}\right)^n \quad . \quad (20)$$

При условии увеличения числа слагаемых в сумме $n \to \infty$ получаем неопределённость $[1^\infty]$, которую раскрываем, используя основное логарифмическое тождество и разложение в ряд логарифмической функции с точностью до линейных слагаемых $\ln(1 + z) = z + o(z)$;

$z = \frac{1}{n} \frac{(it)^2}{2!} \to 0, n \to \infty$:

$$G_{Y_n}(t) = e^{n ln\left(1 + \frac{1}{n} \frac{(it)^2}{2!} \dots\right)} , \quad (21)$$

$$\lim_{n \to \infty} G_{Y_n}(t) = e^{\lim_{n \to \infty} n ln\left(1 + \frac{1}{n} \frac{(it)^2}{2!} \dots\right)} = e^{\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{1}{n}(-\frac{t^2}{2})\right)} = e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (22)$$

Таким образом, при условии $n \to \infty$ характеристическая функция суммы нормированного и центрированного среднего арифметического стремится к характеристической функции нормального закона распределения, то есть закон распределения приближается к нормальному закону распределения с параметрами $M[x] = m = 0$ и $\sigma = 1$.

Заметим, что следствия центральной предельной теоремы играют в применениях очень большую роль, поскольку очень часто на практике встречаются ситуации, когда интересующий результат складывается под влиянием большого числа независимо действующих факторов, влияние каждого из которых незначительно по сравнению с суммарным воздействием всех остальных.

Список литературы:

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей /Е.С. Вентцель // М: ВЫСШАЯ ШКОЛА. – 576 с.
2. Казунина, Г.А. Математика: преобразования Фурье, преобразования Лапласа. - Кемерово: КузГТУ, 2015. – 128 с.