УДК 519.95

ПОНЯТИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Смирнов Д.С., Решетюк А.Ю., студенты ГОс-172, курс – 1,
Волкова Е.А., к.ф.-м.н., доцент
Научный руководитель: Волков В.М., доцент.
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачёва.
г. Кемерово

Основные свойства центра тяжести. Понятие о центре тяжести было введено Архимедом примерно 2200 лет назад. Позже это понятие стало одним из важнейших понятий механики. Но не только в механике оно оказалось полезно. Как это не удивительно, понятие о центре тяжести позволило достаточно легко решить многие трудные геометрические и даже алгебраические задачи, не имеющие никакой связи с механикой.

Определение 1: Точка A, которой присвоили число m, называется материальной точкой.

Определение 2: Число m, которым снабжена точка A, называется массой точки A.

Точка A с массой m обозначается так: mA. Число m может быть как положительным, так и отрицательным. Любую точку (k+t)A можно рассматривать, как две совпадающие точки kA_1 и tA_2.

Определение 3: Центром масс (тяжести) системы материальных точек m_1A_1, m_2A_2,…m_nA_n называется точка Z, для которой имеет место равенство:

$$m_1\overrightarrow{ZA_1}+m_2\overrightarrow{ZA_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{ZA_n}=\vec{0}$$

Для решения задач часто используются три основных свойства центра тяжести:

Свойство 1: Если $m_1+m_2+\ldots+m_n\neq 0$, то у системы материальных точек m_1A_1, m_2A_2,…m_nA_n есть центр тяжести и притом только один.

Доказательство. Возьмём на плоскости произвольную точку O. Пусть $m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{OA_n}=\vec{a}$. Отложим от точки O вектор $\overrightarrow{OZ}=\dfrac{\vec{a}}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$. Точка Z, независимо от выбора точки O, будет центром тяжести данной системы точек. Действительно:

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{ZA_n}}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

$$m_1\overrightarrow{OZ}+m_2\overrightarrow{OZ}+\ldots+m_n\overrightarrow{OZ}=m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{ZA_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{ZA_n}$$

$$m_1(\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OA_1})+m_2(\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OA_2})+\ldots+m_n(\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OA_n})=\vec{0}$$

Т.к. $\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OA_i}=\overrightarrow{A_iZ}$, $m_1\overrightarrow{A_1Z}+m_2\overrightarrow{A_2Z}+\ldots+m_n\overrightarrow{A_nZ}=\vec{0}$. Т.к. $\overrightarrow{A_iZ}=-\overrightarrow{ZA_i}$, то $m_1\overrightarrow{ZA_1}+m_2\overrightarrow{ZA_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{ZA_n}=\vec{0}$, т.е. точка Z является центром тяжести данной системы материальных точек. Предположим теперь, что у данной системы точек есть два центра масс — Z_1 и Z_2. Тогда:

$$m_1\overrightarrow{Z_1A_1}+m_2\overrightarrow{Z_1A_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{Z_1A_n}=m_1\overrightarrow{Z_2A_1}+m_2\overrightarrow{Z_2A_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{Z_nA_n}=\vec{0}\ .$$

$m_1(\overrightarrow{Z_1A_1}-\overrightarrow{Z_2A_1})+m_2(\overrightarrow{Z_1A_2}-\overrightarrow{Z_2A_2})+\ldots+m_n(\overrightarrow{Z_1A_n}-\overrightarrow{Z_2A_n})=\vec{0}$. Т.к. $\overrightarrow{Z_1A_i}-\overrightarrow{Z_2A_i}=\overrightarrow{Z_1Z_2}$, то $(m_1+m_2+\ldots+m_n)\overrightarrow{Z_1Z_2}=\vec{0}$. Т.к. $m_1+m_2+\ldots+m_n\neq 0$, $\overrightarrow{Z_1Z_2}=\vec{0}$, т.е. точка Z_1 совпадает с точкой Z_2. Значит центр тяжести данной системы материальных точек существует и единственен. Свойство 1 доказано.

Свойство 2: Пусть дана система материальных точек m_1A_1, m_2A_2,…m_kA_k, $m_{k+1}A_{k+1}$,…m_nA_n, где $m_1+m_2+\ldots+m_k\neq 0$ и $m_1+m_2+\ldots+m_n\neq 0$. Тогда, если C — центр тяжести системы точек m_1A_1, m_2A_2,… m_kA_k, то центры масс систем материальных точек m_1A_1, m_2A_2,…m_nA_n и $(m_1+m_2+\ldots+m_k)C$, $m_{k+1}A_{k+1}$,… m_nA_n совпадают.

Доказательство. Пусть Z — центр тяжести системы материальных точек m_1A_1, m_2A_2,…m_nA_n. Заметим, что $\overrightarrow{ZC}=\overrightarrow{ZA_i}-\overrightarrow{CA_i}$ при любом i. Пользуясь этим, получаем:

$$(m_1+m_2+\ldots+m_k)\overrightarrow{ZC}+m_{k+1}\overrightarrow{ZA_{k+1}}+\ldots+m_n\overrightarrow{ZA_n}=m_1(\overrightarrow{ZA_1}-\overrightarrow{CA_1})+$$
$$+m_2(\overrightarrow{ZA_2}-\overrightarrow{CA_2})+\ldots+m_k(\overrightarrow{ZA_k}-\overrightarrow{CA_k})+m_{k+1}\overrightarrow{ZA_{k+1}}+\ldots+m_n\overrightarrow{ZA_n}=$$
$$=m_1\overrightarrow{ZA_1}+m_2\overrightarrow{ZA_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{ZA_n}-(m_1\overrightarrow{CA_1}+m_2\overrightarrow{CA_2}+\ldots+m_k\overrightarrow{CA_k})$$

Т.к. Z — центр масс системы материальных точек m_1A_1, m_2A_2,…m_nA_n, а C — центр масс системы материальных точек m_1A_1, m_2A_2,…m_nA_n, то:

$m_1\overrightarrow{ZA_1}+m_2\overrightarrow{ZA_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{ZA_n}-(m_1\overrightarrow{CA_1}+m_2\overrightarrow{CA_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{ZA_n})=\vec{0}$. Значит $(m_1+m_2+\ldots+m_k)\overrightarrow{ZC}+m_{k+1}\overrightarrow{ZA_{k+1}}+\ldots+m_n\overrightarrow{ZA_n}=\vec{0}$, т.е. Z — центр тяжести системы материальных точек $(m_1+m_2+\ldots+m_k)C$, $m_{k+1}A_{k+1}$,…m_nA_n. Т.к. Z также является центром тяжести системы точек m_1A_1, m_2A_2,…m_nA_n, то центры масс этих систем материальных точек совпадают. Свойство 2 доказано.

Свойство 3: Пусть $m_1+m_2\neq 0$. Тогда:

1) если у чисел m_1 и m_2 знак один и тот же, то, если Z лежит на отрезке A_1A_2, и $\frac{ZA_1}{ZA_2}=\frac{m_2}{m_1}$ (рис.1), Z — центр масс точек m_1A_1 и m_2A_2.

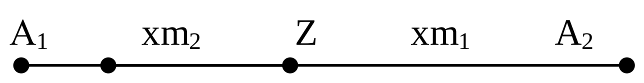

Рис. 1.

2) если у чисел m_1 и m_2 разные знаки, и $|m_1| > |m_2|$, то, если Z лежит на продолжении A_1A_2 за точку A_1, и $\frac{ZA_1}{ZA_2} = -\frac{m_2}{m_1}$ (рис. 2), Z — центр масс точек m_1A_1 и m_2A_2.

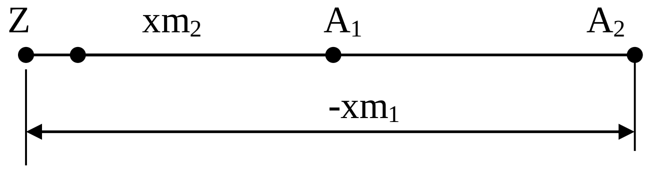

Рис. 2.

Три основных свойства центра тяжести позволяют легко решать некоторые задачи и доказывать некоторые теоремы. Для примера продемонстрируем это на двух задачах.

Задача 1: Доказать, что, если точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB, ΔABC, и отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пресекаются в точке K, то $\frac{AK}{KA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}$ (рис. 3).

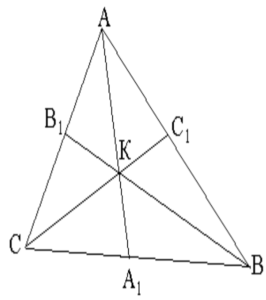

Рис. 3.

Решение. Пусть $m_2=CA_1$, $m_3=BA_1$, а $m_1 = (m_2 + m_3)\frac{KA_1}{AK}$. Рассмотрим систему материальных точек m_1A, m_2B, m_3C. Из свойств 2 и 3 следует, что центр масс этой системы совпадает с центром масс точек $(m_2+m_3)A_1$ и m_1A, т.е. центр масс этой системы — точка K. Центр масс точек m_1A и m_2B по свойству 2 лежит на AB. С другой стороны, по свойству 2 он лежит на прямой CK. Значит C_1 — центр масс этих точек. Тогда по свойству 2 $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{m_2}{m_1}$. Аналогично B_1 — центр масс точек m_1A и m_3C, и $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{m_3}{m_1}$. Т.к. $m_1 = (m_2 + m_3)\frac{KA_1}{AK}$, то $\frac{AK}{KA_1} = \frac{m_2 + m_3}{m_1}$. Значит $\frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{m_2 + m_3}{m_1} = \frac{AK}{KA_1}$. Задача 1 доказана.

Задача 2: Доказать, что, если точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB, ΔABC ,и отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пресекаются в точке K, то $\frac{KA_1}{AA_1}+\frac{KB_1}{BB_1}+\frac{KC_1}{CC_1}=1$ (рис. 3).

Решение. Расставим массы m_1, m_2 и m_3 в точки A, B и C аналогично задаче 1. Тогда K — центр масс получившейся системы материальных точек. С другой стороны, по свойству 3 центр масс этой системы совпадает с центром масс точек $(m_1+m_2)C_1$ и m_3C. Значит по свойству 2

$$\frac{CK}{KC_1}=\frac{m_1+m_2}{m_3}$$

$$\frac{CK}{KC_1}+1=\frac{m_1+m_2}{m_3}+1$$

$$\frac{CC_1}{KC_1}=\frac{m_1+m_2+m_3}{m_3}$$

$$\frac{KC_1}{CC_1}=\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}$$

Аналогично $\frac{KB_1}{BB_1}=\frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}$, а $\frac{KA_1}{AA_1}=\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}$. Следовательно $\frac{KA_1}{AA_1}+\frac{KB_1}{BB_1}+\frac{KC_1}{CC_1}=1$. Задача 2 доказана.

Список литературы:

1. Г.С.М. Кокстер. Введение в геометрию. —М.: Наука, 1966. —648 с.

2. В.В.Прасолов. Задачи по планиметрии: Ч. 2, Учеб. пособие. —М.: Наука. Физматлит, 1995. —240 с. Глава 14;

3. М.Б.Балк. Геометрические приложения понятия о центре тяжести. —М.: Физматгиз, 1959. —230 с. §6;

4. М.Б.Балк и В.Г.Болтянский. Геометрия масс. —М. Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1987. —160 с. §1-5, §11, §13;

5. Е.А.Морозова и И.С.Петраков. Международные математические олимпиады. Пособие для учащихся. —М.: Просвещение, 1971. —254 с.;

6. А.А.Фомин и Г.М.Кузнецова. Международные математические олимпиады. —М.: Дрофа, 2000. —160 с.