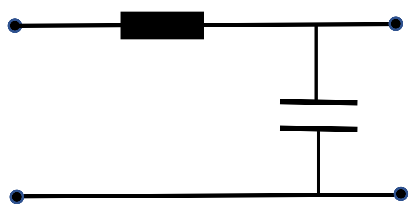
УДК 621.372

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ОТНОШЕНИЯ СИГНАЛ/ШУМ ДЛЯ ПРОСТОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Рыкун С.Д., студентка гр. ЭРб-161, II курс
Научный руководитель: Казунина Г.А., профессор, д.т.н., доцент
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева,
г. Кемерово

Во всех передающих системах наряду с полезным сигналом присутствуют случайные возмущения, которые называют шумом. Присутствие шума искажает форму и уровень сигнала на выходе системы, и во многих случаях значительно. Поэтому задача уменьшения влияния случайных возмущений является важной. Для детерминированных сигналов в качестве критерия оптимальности используется критерий максимума отношения сигнал/шум по мощности на выходе системы в фиксированный момент времени. Это критерий эффективен для систем, предназначенных для обнаружения сигнала известной формы. Для случайных сигналов в качестве критерия оптимальности рассматривают критерий минимума среднего квадрата разности между выходным сигналом системы и истинным значением принимаемого полезного сигнала [1].

В настоящей работе рассматривается задача оптимизации отношения сигнал/шум путем подбора параметров линейной системы.



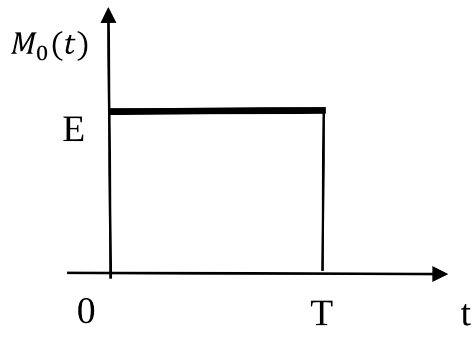


Рис.1. RC- фильтр (а) и сигнал на входе системы (б).

Задача. Оптимальная система предназначена для определения сигнала известной формы на фоне шума. Пусть на вход линейной системы (рис.1а) поступает смесь прямоугольного импульса $M_0(t)$ длительностью T (рис.1б) и белого шума со спектральной плотностью $S_0 = const$. На выходе системы присутствует полезный выходной сигнал $M(t)$ и выходной шум $S(t)$, средний квадрат (мощность) которого равен $\langle S^2(t)\rangle$. В задаче требуется установить параметры системы, которые обеспечивают максимум отношения:

$$M^2(t_0) \Big/ \langle S^2(t)\rangle, \qquad (1)$$

где t_0- момент времени, соответствующий максимуму этого отношения.

Исследуемой системой является простой RC- фильтр, который задается дифференциальным уравнением:

$$RC\frac{dM(t)}{dt} + M(t) = M_0(t) \qquad (2)$$

и, следовательно, передаточной функцией:

$$H(P) = \frac{1}{RC(p+\frac{1}{RC})}. \qquad (3)$$

В уравнении 1: $p = \sigma + i\omega$ – комплексная переменная. Параметром, для которого требуется определить оптимальное значение, является постоянная времени $\tau = RC$ или обратная ей величина $z = {}^{1}/_{\tau} = {}^{1}/_{RC}$.

Для выбора момента времени, соответствующего максимуму отношения сигнал/шум, проводим анализ полезного сигнала на выходе системы. При этом полезный сигнал на выходе системы (рис.2) находим, применяя преобразование Лапласа [2] к указанному выше дифференциальному уравнению, записав входной сигнал в виде

$$M_0(t) = E(\sigma(t) - \sigma(t-T)) \to E(\frac{1}{p} - \frac{e^{-pT}}{p}), \qquad (4)$$

где $\sigma(t)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда. В результате получаем

$$M(p) = H(p)M_0(p) = \frac{E}{\tau}\left(\frac{1}{p\left(p+\frac{1}{\tau}\right)} - \frac{e^{-pT}}{p\left(p+\frac{1}{\tau}\right)}\right) \to \qquad (5)$$

$$\to E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\sigma(t) - E(1 - e^{-\frac{t-T}{\tau}})\sigma(t-T). \qquad (6)$$

Выходной полезный сигнал имеет максимум в момент времени $t = T$, что видно из рис.2.

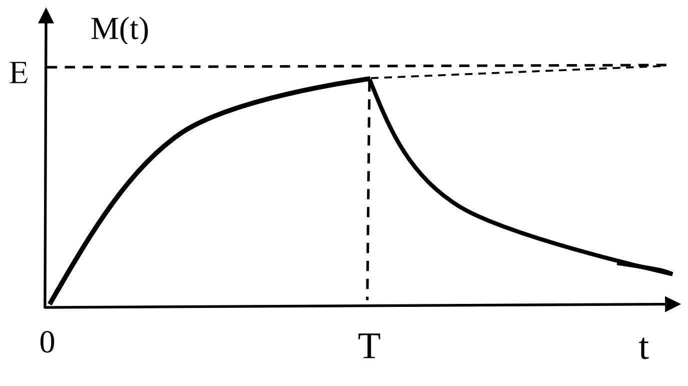


Рис.2. Полезный сигнал на выходе системы.

Поэтому выбираем $t_0 = T$ для момента, который соответствует максимуму отношения сигнал/шум, а полезный сигнал на выходе системы для этого момента имеет вид

$$M(t_0) = E\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right). \qquad (7)$$

Средний квадрат выходного шума (мощность) находим, используя квадрат модуля амплитудно-частотной характеристики фильтра

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1+\tau^2\omega^2} \tag{8}$$

и спектральную плотность входного шума $\frac{S_0}{\pi} = const$ [1]:

$$\langle S^2(t)\rangle = \frac{S_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{1+\tau^2\omega^2} = \frac{S_0}{2\tau} = \frac{S_0}{2RC}. \tag{9}$$

Таким образом, в задаче требуется найти максимум функции

$$M^2(t_0)\Big/\langle S^2(t)\rangle = f(z) = \frac{E^2(1-e^{-zT})^2}{zS_0/2} \tag{10}$$

относительно переменной $z = \frac{1}{\tau} = 1/RC$.

Заметим, что эта функция положительна при всех значениях $z > 0$ и равна нулю при $z = 0$ и $z \to \infty$. Поэтому должно существовать значение $z > 0$,при котором функция имеет локальный максимум. Для определения значения переменной z, соответствующей экстремуму, находим производную и приравниваем ее к нулю:

$$\frac{df}{dz} = \frac{2E^2}{S_0}\cdot\frac{2Tz\left(1-e^{-Tz}\right)e^{-Tz}-\left(1-e^{-Tz}\right)^2}{z^2} = 0. \tag{11}$$

Преобразовав полученное выражение для производной, получаем уравнение

$$1 + 2Tz = e^{zT}, \tag{12}$$

которое решаем приближенно методом Ньютона [3] и получаем результат

$$zT \approx 1{,}256. \tag{13}$$

Таким образом, значение постоянной времени RC- фильтра, обеспечивающее максимум отношения сигнал/шум в момент времени T, определяется как

$$\tau = RC = \frac{T}{1{,}256}. \tag{14}$$

Список литературы:

1. Купер, Дж. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. / Дж. Купер, К. Макгиллем // М.: Мир, 1989. - 372 с.
2. Казунина, Г.А. Математика: преобразования Фурье, преобразования Лапласа. - Кемерово: КузГТУ, 2015. – 128 с.
3. Косарев, В.И. 12 лекций по вычислительной математике / В.И. Косарев // М: ФИЗМАТКНИГА, 2013. - 239 с.