УДК 51

# ЧИСЛО ОРБИТ МНОЖЕСТВА КУБИКА РУБИКА

Пылов П.А., студент гр. ИТб-162, II курс
Научный руководитель: Грибков В.И., старший преподаватель
Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

В 1975 году венгерский архитектор и профессор Эрне Рубик создал математическую головоломку, которая получила широкое распространение во всём мире. Головоломкой является куб, разбитый на 27 одинаковых кубиков плоскостями, параллельными граням куба; 26 кубиков являются наружными, а один — внутренний. Наружные кубики, с помощью осей сцеплены так, что любая из плит, образованных девятью кубиками, грани которых параллельны некоторой грани куба, может свободно вращаться вокруг центра в любом направлении. При повороте одной из плит на углы 90°, 180° или 270° свобода вращений системы полностью сохраняется: любую из плит снова можно вращать вокруг центра в любую сторону. Внешние грани окрашены в шесть разных цветов.

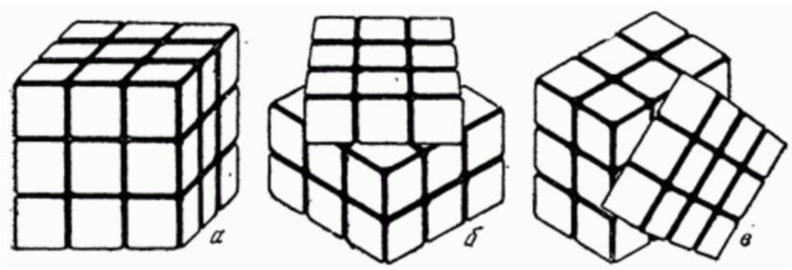


Рис. 1. Общий вид кубика Рубика

Общий вид куба изображён на рис. 1. *а*, на рис. 1. *б*, *в* указаны возможные повороты плит. В начальном положении маленькие кубики расположены так, что все грани большого куба окрашены в один цвет. Затем с помощью нескольких последовательных вращений грани куба приобретают пёструю окраску. Цель игры состоит в том, чтобы, получив в руки такой пёстро окрашенный кубик, с помощью поворотов плит перейти к начальной раскраске, т.е. добиться такой расстановки кубиков, при которой все грани большого куба окрашены в один цвет.

**Число возможных механических комбинаций Кубика Рубика**

Основой Кубика Рубика являются три взаимно перпендикулярных оси, на концы которых насажены 6 разноцветных граней. Также кубик состоит из рёберных и угловых элементов. На каждой грани в Кубике Рубике находятся 9 маленьких квадратов. Соответственно, всего в головоломке $6 \cdot 9 = 54$ маленьких квадрата. Они складываются из:

1. 6-ти неподвижных, находящихся на осях;
2. 12 рёберных элементов, у которых 2 цвета;
3. 8 угловых элементов, у каждого из которых 3 цвета.

Итого: $6+12 \cdot 2+8 \cdot 3=6+24+24=54=6 \cdot 9$ квадратов.

Начинаем собирать Кубик с разобранного состояния. Для начала начинаем вставлять рёберные кубики в соответствующие пазы. Установить первый кубик мы можем на 12 различных местоположений, так как все места для рёберных кубиков свободны. Второй кубик этого же типа выбираем из оставшихся 11, третий из 10 и т.д. до последнего. В итоге имеем следующее количество положений (расстановок): $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=12!$

Однако при сборке не следует забывать важной особенности: ориентации кубиков, то есть мы можем поставить кубик двумя разными способами на одно и то же место.

Данная особенность, называемая ориентацией, удваивает количество комбинаций для каждого элемента. Всего различных комбинаций-ориентаций, несложно показать, равно $2^{12}$. Тогда с учётом ориентаций количество расстановок равно $12! \cdot 2^{12}$, или 1961990553600.

После установки рёберных элементов необходимо вмонтировать угловые грани. Это можно сделать (не сложно это получить) вариантами в количестве $8! \cdot 3^8=264539520$.

Чтобы найти количество комбинаций кубика, собираемого механическим способом, необходимо найти произведение расстановки рёберных элементов и умножить это на расстановку угловых кубиков. Итого: $12! \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 3^8 =$ 519 024 039 293 878 272 000. Обозначим это число символом M.

Возникают следующие вопросы:

1) Можно ли любую комбинацию, получаемую механическим способом, собрать в нормальный кубик. Если ответ на первый вопрос отрицательный, тогда второй вопрос звучит так:

2) Какую долю от числа механических вариантов составляют комбинации, получаемые только допустимыми вращениями граней? И третий вопрос:

3) Сколько всего орбит (классов эквивалентности) среди механических вариантов, каждый из которых внутри орбиты можно перевести в любой другой подходящим вращением граней? Понятно, что одной из этих орбит является множество вариантов, получаемых вращениями граней.

На все выше поставленные вопросы в данной работе даётся ответ.

**Группа перестановок движений Кубика Рубика**

Описать состояние куба можно (см. [1,3]), указав место, которое занимает каждый маленький кубик, не забывая при этом ориентацию, которую он занимает в нём. Средние (рёберные) кубики ориентируются на своём месте двумя способами, угловые, в силу наличия трёх граней (цветов) - тремя способами. Возьмём в рассмотрение кубик Рубика в начальном состоянии. Занумеруем его угловые кубики в каком-либо порядке числами 1, 2, .... , 8, а средние числами 9, 10, … , 20. Этими же числами занумеруем места, на которых стоят маленькие кубики. Любое состояние куба после этого можно характеризовать перестановкой, указывающей номера угловых и средних кубиков, стоящих при этом состоянии на местах 1 – 20. Если в состоянии S на месте с номером i стоит кубик с номером $j_i$ (1 ≤i≤ 20), то этому состоянию однозначно ставится в соответствие перестановка

$$\varphi_s = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \cdots 20 \\ j_1 j_2 j_3 \cdots j_{20} \end{pmatrix}.$$

Перестановка $\varphi_s$ определяет только места, занимаемые маленькими кубиками, состояние S она однозначно не определяет, так как нужно определить ещё ориентацию кубиков. Для задания ориентации угловых кубиков зафиксируем две противоположные грани куба — например, верхнюю и нижнюю. Предположим, что эти грани окрашены в синий (верхняя) и зелёный (нижняя) цвета. Любой угловой кубик имеет теперь либо одну грань синего цвета, либо одну грань зелёного цвета. Угол, на который нужно повернуть угловой кубик вокруг вершины (диагонали большого куба), чтобы горизонтальная грань стала синей или зелёной, и определяет его ориентацию. Этот угол может равняться 0°, 120° или 240°. Условимся обозначать ориентацию углового кубика, соответствующую повороту на 0, символом «0», повороту на 120° — символом «1», а повороту на 240° — символом «-1». После этого при любом состоянии куба расположение углового кубика с учётом его ориентации описывается парой чисел $(i,s)$, где i — номер места, на котором он стоит, s — его ориентация. При поворотах граней кубика эта пара изменяется — как первая координата, так и вторая. Для того чтобы указать ориентацию среднего кубика, на каждом ребре куба фиксируем направление (укажем стрелку) и «нарисуем» такое же направление на среднем кубике так, чтобы в начальном состоянии оба направления совпадали. После этого при любом состоянии куба положение среднего кубика с учётом его ориентации описывается парой чисел $(j,t)$, $9 \leq j \leq 20$, t = $(0|1)$, где j — номер места, на котором стоит кубик, а t=0 если ориентации кубика и ребра, на котором он расположен, совпадают, и t = 1 если они противоположны.

Таким образом, состояния кубика однозначно характеризуются перестановками множества

$K = \{1,2, \ldots, 8\} \times \{0,1,-1\} \cup \{9,10, \ldots, 20\} \times \{0,1\}$, где $|K|=48$.

Группа движений кубика есть подгруппа группы $S_{48}$.

**Порядок группы движений Кубика Рубика**

Каждая грань куба может поворачиваться тремя способами: на 90°, 180° и 270°. Если повороты каждой из граней на 90° (против часовой стрелки) обозначить символами *a, b, c, d, e, f*, то любое движение граней, приводящее к некоторой допустимой комбинации, можно записать в виде слова в алфавите данных символов. Множество данных движений (слов) образуют группу, порядок которой равен **M**/12. Доказательство данного факта можно найти в работах 1, 3 из списка литературы. Оно строится на свойстве группы перестановок, описывающей движения (повороты) граней кубика. Из данного результата следуют ответы на два первых вопроса. – Далеко не каждую механическую сборку можно привести к нормальному виду, а лишь только 1/12-ю часть!

**Число орбит в множестве механических сборок**

Покажем, что все орбиты равномощны, и, следовательно, их ровно 12(!).

Пусть некоторая механическая сборка не принадлежит первой орбите, т.е. её нельзя привести к нормальному положению цветов. Возьмём её за исходную и мысленно «перекрасим». Последнее можно получить, задав таблицу однозначного соответствия между положениями и ориентациями кубиков. Данное исходное положение можно перевести движениями граней в другие положения, число которых, очевидно, равно M/12. Это и есть 2-я орбита. Теперь, если мы возьмём любую сборку, не принадлежащую первым 2-м орбитам, получим 3-ю орбиту. Продолжая данные рассуждения аналогичным способом, мы получим 12 равномощных орбит. Что и требовалось показать.

**Список литературы:**

1. Дубровский, В.Н. Математика волшебного кубика / В.Н. Дубровский. – Москва: Изд-во журнала Квант, 1982. – 7 с.

2. Калужнин Л.А., Сущанский В.И. Преобразования и перестановки: Пер. с укр.- 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 160 с.

3. Залгаллер, В. Венгерский шарнирный кубик / В. Залгаллер, С. Залгаллер. – Москва: Изд-во журнала Квант, 1980. – 6 с.