УДК 519.86

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО И МИНИМАЛЬНОГО УРОВНЕЙ НАЦИОНАЛЬНОГО ДОХОДА В МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА САМУЭЛЬСОНА-ХИКСА

Победаш П.Н., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики,
Шапошников В.С., студент гр. БЭС-163, II курс,
Ляховченко О.С., студентка гр. БЭС-162, II курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева г. Кемерово

Актуальность применения математических моделей к прогнозу динамики экономической деятельности не вызывает сомнений. В данной статье исследуется на конкретных числовых данных одна из таких моделей - модель Самуэльсона-Хикса (описанная в работе [1]), применяемая для описания колебаний деловой активности, уровня национального дохода и других показателей в условиях экономического роста. Далее будет рассмотрен подход, использующий дифференциальное исчисление для расчета максимального и минимального уровней национального дохода на основе указанной модели.

Предполагается в дальнейшем, что инвестиции I^t пропорциональны приросту валового выпуска Y^t с коэффициентом пропорциональности (фактором акселерации) v, а потребление C^t является линейной функцией от валового выпуска с запаздыванием в 1 год. Тогда уравнения динамики инвестиций и потребления примут следующий вид:

$$I^t = V(Y^{t-1} - Y^{t-2}),\ \mathrm{t} = 2, 3, \ldots \quad (1)$$

$$\mathrm{C}^\mathrm{t} = \alpha Y^{t-1} + \beta,\ \mathrm{t} = 1, 2, \ldots, \quad (2)$$

где t –дискретное время, измеряемое в годах. Учитывая условие бюджетного баланса (равновесия спроса и предложения), запишем уравнение

$Y^t = I^t + \mathrm{C}^\mathrm{t}$, t = 0,1,2, … (3)

Подставляя уравнения (1) и (2) в равенство (3), получим:

$$Y^t = V(Y^{t-1} - Y^{t-2}) + \alpha Y^{t-1} + \beta = (\alpha + V)Y^{t-1} - VY^{t-2} + \beta.$$

Таким образом,

$$Y^t = (\alpha + V)Y^{t-1} - VY^{t-2} + \beta,\ \mathrm{t} = 2,3, \ldots \quad (4)$$

– уравнение динамики валового выпуска, являющееся разностным уравнением второго порядка.

Рассмотрим для примера следующие модельные значения параметров в (1)-(3): при V = 0,25, α = 0,775; β = 1,8 и валовых выпусках в моменты t=0 и t=1, равных соответственно $Y^0 = 8$ и $Y^1 = 10$. С учетом перечисленных исходных данных найдем уравнение динамики национального дохода (валового выпуска) Y^t, а также максимальный и минимальный уровень национального дохода Y^{max} и Y^{min} соответственно для любого t ≥ 0. Для этого получим явную формулу для Y^t. Подставляя указанные выше значения параметров модели (1)-(3), перепишем уравнение (4) в виде:

$$Y^{t+2} = 1{,}025Y^{t+1} - 0{,}25Y^t + 1{,}8; \ t=0,1, \ldots \qquad (4')$$

Тогда, согласно [2], соответствующее уравнению динамики (4') характеристическое уравнение запишем в следующей форме:
$\lambda^2 = 1{,}025\,\lambda - 0{,}25$. Следовательно,

$$\lambda^2 - 1{,}025\,\lambda + 0{,}25 = 0. \qquad (5)$$

Найдем корни уравнения (5):

$$D = (-1{,}025)^2 - 4 \times 1 \times 0{,}25 = 0{,}050625 = (0{,}225)^2 > 0;$$

$$\lambda_1 = \frac{1{,}025 - 0{,}225}{2} = 0{,}4 = \frac{2}{5};$$

$$\lambda_2 = \frac{1{,}025 + 0{,}225}{2} = 0{,}625 = \frac{5}{8}.$$

Тогда получим решение разностного уравнения (4') в виде:

$$Y^t = \alpha_1(0{,}4)^t + \alpha_2(0{,}625)^t + 8, t = 0{,}1 \ldots \qquad (6)$$

Подставляя в (6) t=0 и t=1, получим:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 8 = 8 \\ 0{,}4\alpha_1 + 0{,}625\alpha_2 + 8 = 10 \end{cases} <=> \begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_1 \\ 0{,}4\alpha_1 + 0{,}625\alpha_2 = 2 \end{cases},$$

откуда следует, что

$$0{,}4\alpha_1 - 0{,}25\alpha_1 = 2 <=> -0{,}225\alpha_1 = 2 => \alpha_1 = -\frac{2}{0{,}225} = -\frac{80}{9}$$

Таким образом, $\alpha_1 = -\frac{80}{9}$ $\alpha_2 = \frac{80}{9}$. Подставляя найденные значения α_1 и α_2 в формулу (6), получим

$$Y^t = \frac{80}{9}[(0{,}625)^t - 0{,}4^t] + 8, t = 0{,}1{,}2 \ldots \qquad (7)$$

Для нахождения максимального и минимального уровней национального дохода Y^{max} и Y^{min} рассмотрим функцию непрерывного аргумента

$y = f(t) = \frac{80}{9}[(0{,}625)^t - 0{,}4^t] + 8$ для $t \geq 0$. Очевидно, что функция $f(t) \in c^1\left([0;+\infty)\right)$ – дифференцируема на интервале $[0;+\infty)$.

Найдём критические точки (возможные точки экстремума) t_0 данной функции:

$$f'(t) = \frac{80}{9}[(0{,}625)^t ln0{,}625 - 0{,}4^t ln0{,}4] = 0 |: \frac{80}{9} => 0{,}625^t ln0{,}625 =$$

$$= 0{,}4^t ln0{,}4 => \left(\frac{0{,}625}{0{,}4}\right)^t = \frac{ln0{,}4}{ln0{,}625} => t_0 = \frac{\ln\left(\frac{ln0{,}4}{ln0{,}625}\right)}{\ln\left(\frac{25}{16}\right)} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{ln0{,}4}{ln0{,}625}\right)}{2\ln(1{,}25)} \approx 1{,}49588.$$

Таким образом, $t_0 \approx 1{,}49588$ – единственная критическая точка. Исследуем знак производной на каждом из промежутков, на которые разбивается точкой t_0 область определения рассматриваемой функции $f(t)$.

$$I)\ f'(0) = \frac{80}{9}[\ln(0{,}625) - \ln(0{,}4)] = \frac{80}{9}\ln\left(\frac{0{,}625}{0{,}4}\right) = \frac{80}{9}\ln\left(\frac{25}{16}\right) =$$

$$= \frac{80}{9}\ln\left(\left(\frac{5}{4}\right)^2\right) = \frac{160}{9}\ln(1{,}25) > 0; \text{т. к } 1{,}25 > 1 \text{ и}$$

$$\ln(1{,}25) > ln1 = 0.$$

$$II)\ f'(2) = \frac{80}{9}[\left(\frac{5}{8}\right)^2 \ln\left(\frac{5}{8}\right) - (\frac{2}{5})^2 \ln\left(\frac{2}{5}\right)] \approx -0{,}329 < 0.$$

Следовательно, точка $t_0 \approx 1{,}5$ – точка максимума функции $f(t)$.

Так как $f'(t) < 0$ для любого $0 \le y < t_0$,
$t_0 \in [1; 2]$, то на интервале $[0; 1]$ функция $f(t)$ возрастает, следовательно,

$$Y^t \le Y^1 \text{ для любого } t \in [0; 1]. \qquad (8)$$

Так как $f'(t) < 0$ для любого $t > t_0$ при $t \ge 2$,
то на интервале $[2; +\infty]$ функция $f(t)$ убывает, следовательно,

$$Y^t \ge Y^2 \text{ для любого } t \in [2; +\infty] \qquad (9)$$

Из условий (8) и (9) получим, так как $f(t) -$ неприрывная функция, что
$Y^1 \le Y^{max} \le Y^2$ откуда следует, что $Y^{max} = \max(Y^1; Y^2)$.

По формуле (7) найдем

$$Y^2 = \frac{80}{9}[0{,}625^2 - 0{,}4^2] + 8 = \frac{80}{9}[\left(\frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2\Bigg] + 8 = \frac{41}{20} + 8 = 10{,}05,$$

т.е. $Y^{max} = Y^2 = 10{,}05$.

Найдём теперь минимальный уровень национального дохода Y^{min}. Поскольку 0,625>0,4, то $0{,}625^t \ge 0{,}4^t$ для любого $t \ge 0$, откуда следует, что $0{,}625^t - 0{,}4^t \ge 0$. Поэтому при любом $t \ge 0$ доход $Y^t \ge 8$, а значит, $Y^{min} = 8$.

Так как $t_0 \approx 1{,}5 -\ f(t)$ и других точек экстремума нет, то минимум функции $f(t)$ достигается на границе интервала $[0; +\infty)$.

$$Y^0 = 8; Y^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} Y^t = \lim_{t\to+\infty}\frac{80}{9}[0{,}625^t - 0{,}4^t] + 8 =$$

$$= \left|0{,}625 < 1 \text{ и } 0{,}4 < 1 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} 0{,}625^t = 0 \text{ и } \lim_{t\to+\infty} 0{,}4^t = 0\right|$$

$$= \frac{80}{9}[0 - 0] + 8 = 8, \text{поэтому } Y^{+\infty} = 8.$$

Следовательно $Y^{min} = \min(Y^0; Y^{+\infty}) = \min(8; 8) = 8$.

В итоге, $Y^{min} = Y^0 = 8; Y^{max} = Y^2 = 10{,}05$. Таким образом, доказали, что $8 \le Y^t \le 10{,}05$ при любом $t \in [0; +\infty)$.

Используя условия (2) и (3), нетрудно найти явные выражения для инвестиций I^t и потребления C^t, а затем исследовать их на экстремум для определения наибольшего и наименьшего значений указанных экономических показателей.

Список литературы:

1. Математическая экономика на персональном компьютере. Под ред. М. Кубонива. – М.: Финансы и статистика, 1991. – 304 с.
2. Мешечкин В.В., Победаш П.Н. Параметрический анализ и асимптотические оценки выпусков в одной модели экономического роста.// В сб. трудов молодых ученых КемГУ, посвященный 60-летию Кемеровской области: В 2т.Т.2.Кемеровский госуниверситет.- Кемерово: Полиграф, 2002. - С.109-115.