X Всероссийская научно-практическая конференция
молодых ученых **«РОССИЯ МОЛОДАЯ»**
74820-1 **24-27 апреля 2018 г.**

УДК 51

ЗАДАЧА ОБ ИСТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ

Матвеева Е.Д., студентка гр. ГМс-171
Научный руководитель: Прейс Е.В, к.т.н., доцент
Кузбасский Государственный Технический Университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

Пусть сосуд объемом V конусообразный формы наполнен жидкостью. В сосуде есть круглое отверстие, с площадью ко πa^2, через которое жидкость вытекает из сосуда (Рис.1)

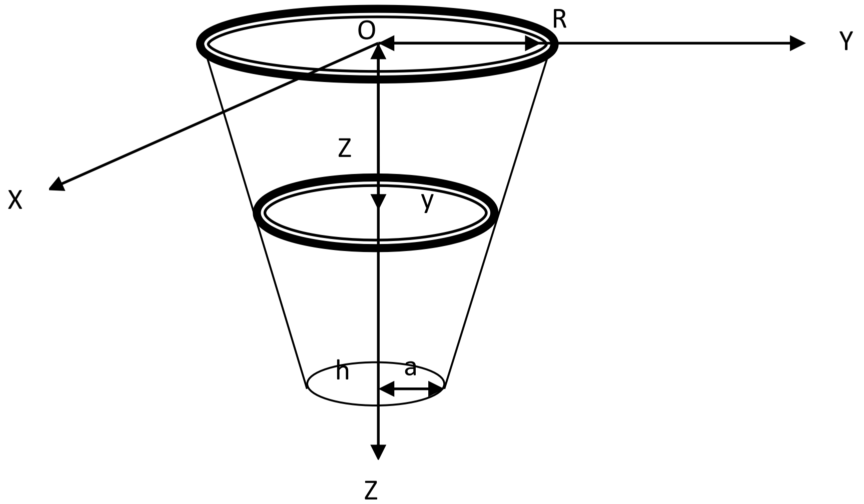

Рис. 1.

Найдем время, за которое жидкость полностью вытекла из сосуда.

Определим количество жидкости dV, которое вытекает за время dt со скоростью U через отверстие площадью πa^2:

$$dV = (\pi a^2) * U * dt$$

За время dt уровень жидкости в сосуде понизится на величину dQ, причем скорость падения уровня будет равна U_1. Будем считать, что за малое время dt площадь поверхности останется неизменной и равна площади круга πy^2. Тогда объем жидкости в сосуде уменьшится на величину:

$$dQ = \pi a^2 U dt = \pi y^2 U_1 dt$$

Объем воды, который вытек за время dt, равен объему воды, на который снизился ее уровень. Из равенства получаем:

$$a^2 U = y^2 U_1 \quad (1)$$

Используя физический закон, по которому скорость U истечения жидкости из отверстия с площадью πa^2 равна скорости свободно падающего тела с высоты столба жидкости над отверстием, равным $h - z$, тогда:

$$U = \sqrt{2g(h-z)}$$

g – ускорение свободного падения;
h − высота сосуда;
z - уровень жидкости в момент времени t.
Используя это, получим из (1):

$$a^2\sqrt{2g(h-z)} = y^2 U_1$$

$$\mathrm{U_1 = \frac{a^2}{y^2}\sqrt{2g(h-z)}} \qquad (2)$$

Определим, как изменится величина радиуса сечения конуса y в зависимости от уровня жидкости z. Для этого найдем уравнение образующей конуса, проходящей через точки (R, O) и (a, h) (Рис.2).

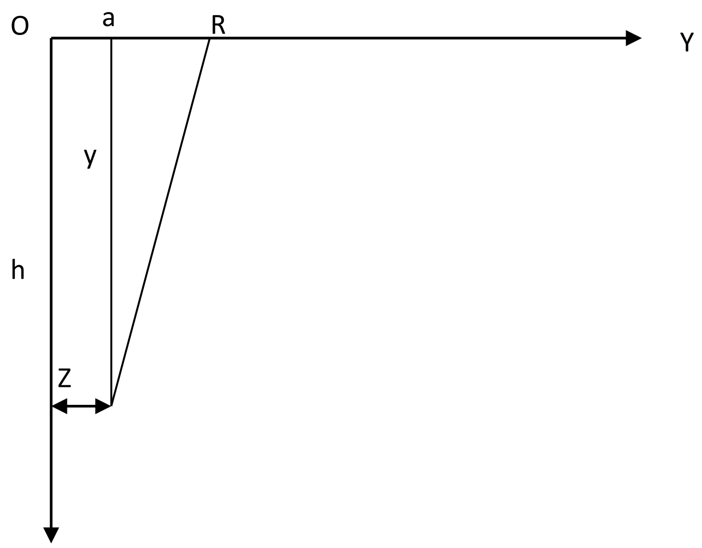

Рис.2

$\frac{y-r}{a-r} = \frac{z-o}{h-o}$, выразим y и подставим в уравнение (2). $y = \frac{z}{h}(a-R) + R$

$$U_1 = \frac{a^2}{(\frac{z}{h}(a-R)+R)^2} * \sqrt{2g(h-z)};$$

$$U_1 = \frac{a^2 h^2 \sqrt{2g}\sqrt{h-z}}{(z(a-R)+hR)^2}.$$

Скорость падения уровня воды U_1 представим как первую производную пути z по времени t:

$$U_1 = z_t' = \frac{dz}{dt} \text{ ,следовательно}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{a^2h^2\sqrt{2g}\sqrt{h-z}}{(z(a-R)+hR)^2};$$

$$dt = \frac{(z(a-R)+hR)^2}{a^2h^2\sqrt{2g}\sqrt{h-z}}dz.$$

Для определения реального времени вытекания жидкости из конусообразного сосуда, проинтегрируем это выражение в пределах от 0 до h:

$$t = \int_o^h \frac{(z(a-R)+hR)^2}{a^2h^2\sqrt{2g}\sqrt{h-z}}dz.$$

Чтобы найти такой интеграл, обозначим $a - R = A$, $hR = B$ и вычислим $\int_o^h \frac{(Az+B)^2}{\sqrt{h-z}}dz$ методом замены переменной:

$$\begin{cases} \sqrt{h-z} = t\,, h-z = t^2 \\ z = h - t^2 \\ dz = -2tdt \end{cases}$$

$$\sqrt{h-0} = t_1 = \sqrt{h}$$

$$\sqrt{h-h} = t_2 = 0 \quad \text{, получим:}$$

$$\int_O^h \frac{(Az+B)^2}{\sqrt{h-z}}dz = A^2\frac{16}{15}h^2\sqrt{h} + \frac{8A}{3}h\sqrt{h} + 2B^2\sqrt{h}$$

$$t = \left[\frac{8}{3}(a-R)h\sqrt{h} + \frac{2h\sqrt[2]{h}}{15}(8(a-R)^2 + 15R^2)\right] * \frac{1}{a^2h^2\sqrt{2g}}$$

$$t = \frac{8(a-R)}{3a^2\sqrt{2gh}} + \frac{2\sqrt{h}}{15a^2\sqrt{2g}}(8(a-R)^2 + 15R^2)$$

Найдем время вытекания жидкости из конусообразного резервуара с параметрами: R=2 м*;* *h=5 м; a=0.1 м; g=9,81*м/сек^2

$$t = \frac{8*(0{,}1-2)}{3*0{,}01\sqrt{2*9{,}81*5}} + \frac{2\sqrt{5}}{15*0{,}01*\sqrt{2*9{,}81}} * (8*(0{,}1-2) + 15*4) == 22{,}8 + 598{,}24 = 575{,}44 \text{ сек} \approx 9{,}6 \text{ минут}$$

Эти вычисления могут быть использованы при расчете времени разгрузки конусообразных ёмкостей.

Список литературы:

1. Петрушко, И. М. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения. Лекции и практикум. – СПб. : Лань, 2008. – 608 с.

2. Батунер Л.М., Позин М.Е. Математические методы в химической технике.– Издательство «Химия» 1976г.–824с.