УДК 519.63 (074.8)

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ТЕЙЛОРА В ПРОГАММИРОВАНИИ

Курочкин С.С, студент гр. АЭб-171, I курс
Научный руководитель: Казунина Г.А., профессор, д.т.н., доцент
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева,
г. Кемерово

В современном мире мы наблюдаем прогрессивный технический прорыв. В 1957 году американской фирмой NCR создан первый компьютер на транзисторах. Сейчас же нельзя представить человека, у которого не было бы телефона или компьютера. Компьютер – это электронно-вычислительная машина, способная выполнять заданную последовательность операций, называемую программой. При создании простейшего калькулятора используется программирование. Для выполнения каких-либо действий, например, ввода данных и последующих вычислений, необходима программа. Если рассмотреть калькулятор, то увидим множество кнопок, каждая из которых несет за собой действие или операцию. Также в нынешнее время существует множество языков программирования. Существует множество сред программирования. Среды программирования (или как их еще называют, среды разработки) — это программы, в которых программисты пишут свои программы. Иными словами, среда программирования служит для разработки (написания) программ и обычно ориентируется на конкретный язык или несколько языков программирования.

Представим, что перед нами стоит задача написать код, а значит создать программу, для вычисления значения функции $f(x) = \ln(1 - x^2)$ с точностью E. Как правило, среда распознает только арифметические операции. Поэтому нашу функцию, используя свойства логарифмов, необходимо преобразовать к виду:

$$\ln(1 - x^2) = \ln(1 - x)\,(1 + x) = \ln(1 - x) + \ln(1 + x),$$

а затем разложить функцию в степенной ряд, так как в среде доступны только арифметические операции. Но для начала разберемся, что же вообще такое степенной ряд и познакомимся с интервалом его сходимости.

Степенным рядом называется бесконечная сумма вида:

$$F(x) = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + .. + C_n(x - a)^n + .. = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - a)^n.$$

Числа C_n называются коэффициентами ряда и зависят только от порядкового номера члена ряда. Хорошо известным примером ряда является бесконечная геометрическая прогрессия

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad (1)$$

сумма которой определена только при значениях переменной $|x| < 1$. Сумма других рядов также может оказаться определенной только для значений переменной x, удовлетворяющих некоторым ограничениям. Если сумма ряда определена, то говорят, что ряд сходится, а область допустимых значений переменной называют интервалом или областью сходимости. Подстановка в ряд значения переменной $x = a$ дает связи между значением функции и первым коэффициентом ряда $C_0 = F(a)$. Общую формулу для коэффициентов ряда можно получить при помощи повторного n – кратного дифференцирования ряда с использованием формулы для производной степени с натуральным показателем и последующей подстановки в формулу $x = a$: $C_n = \frac{1}{n!}F^{(n)}(a)$. Следовательно, коэффициенты степенного ряда определяются производными, вычисленными в точке a. Для конкретной функции различают два типа степенных рядов. Если $a \neq 0$, степенной ряд для функции $F(x)$ называется рядом Тейлора с центром в точке a:

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{1}{2}F''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(a)(x-a)^n + \cdots$$

При $a = 0$ ряд называют рядом Маклорена

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0)x^n + \cdots$$

По известному разложению функции в степенной ряд можно вычислить значения всех производных функции в точке разложения. [1].

Для решения рассматриваемой задачи воспользуемся формулой Тейлора для натурального логарифма с опорной точкой $x_0 = 0$ (ряд Маклорена). Для функции $\ln(1+x)$ она имеет следующий вид [3]:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n. \qquad (2)$$

Заменяя в формуле $-x$ на x, получим другую формулу:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}. \qquad (3)$$

Тогда рассматриваемая функция имеет вид

$$\ln(1+x) + \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n - \frac{x^n}{n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^{n-1}-1)}{n}x^n = -x^2 + 0 - \frac{x^4}{2} + 0 - \frac{x^6}{3} + 0 - \cdots.$$

При нечетном n члены данного ряда обращаются в нуль. Поэтому вычисляемую функцию можно записать в виде

$$\ln(1-x^2) = -\sum_0^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n+1} = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - \cdots - \frac{x^{2n+2}}{n+1} \ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

Далее, используя полученное разложение в ряд для вычисляемой функции (4), находим рекуррентную формулу для членов данного ряда

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{x^{2n+2}}{n+1} \cdot \frac{n-1+1}{x^{2(n-1)+2}} = \frac{x^2 \cdot n}{n+1}.$$

Затем последовательно вычисляем члены ряда и суммируем до тех пор, пока очередное слагаемое не будет меньше заданной точности. Код программы, при помощи которого вычисляем значение функции, приведен на рис.1. В качестве входных данных задаем значения переменной x и точность вычислений E с учетом условия сходимости ряда: $|x| < 1$. Выходными данными является значение функции в точке x. Результаты вычислений представлены в таблице 1.

```cpp
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;

int main() {
    double E, logarithm = 0, ai = 1, p = 1, x;
    int i = 1;
    cin >> x >> E;
    while(ai > E){
        p *= x*x;  // вычисление числителя члена ряда
        ai = p / i; // вычисление члена ряда
        logarithm -= ai;
        i++;
    }
    cout <<  logarithm;

    return 0;
}
```

Рис.1. Код программы для вычисления функции.

Таблица 1.

E	x	$\ln(1-x^2)$	Результат
0.001	0.5	$ln(0.75)$	-0.287435
0.0001	0.5	$ln(0.75)$	-0.287671
0.01	0.1	$ln(0.99)$	-0.01005
0.001	-0.1	$ln(0.99)$	-0.01005
0.1	0	$ln(1.00)$	0
0.01	0	$ln(1.00)$	0

Список литературы:

1. Алексеев, Д.В. Элементарные аналитические методы и свойства основных элементарных функций /Д.В. Алексеев, Г.А. Казунина, Г.В. Алексеевская. – Кемерово: КузГТУ, 1998. – 91с.