УДК 51

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ

Комалеева Ю. М., студентка группы ХОб-171, I курс
Трушникова Н. В., старший преподаватель кафедры математики
Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева
г. Кемерово

Общепризнанно, что, на вопрос - является ли математика скучным предметом, с большой вероятностью получите утвердительный ответ. Многие считают математику «сухой» и неинтересной наукой. Попытаемся доказать обратное.

Большинство привыкло считать, что решение, приводящее к правильному ответу, является единственно верным. Еще со школы мы знаем, что существуют рациональный и нерациональный подходы к решению задач, но в данной работе мы поговорим о двух и более рациональных способах, приводящих к одному верному ответу. Допустим, задан вопрос: что из нижеперечисленного не относится к математике как к науке?

1) логика;
2) точность;
3) оригинальность; неординарность;
4) рациональность.

Многие из предложенных вариантов выберут третий, так как он менее других ассоциируется с математикой. Целью этой работы является поиск нескольких способов решения одной задачи и умение выбирать из них наиболее оригинальный и оптимальный. Начнем с того, что значит оригинальность в математике. Во-первых, это отличный от других путь решения или доказательства, приводящий к верному ответу. Во-вторых, это ассоциативное понятие, помогающее глубже осознать суть того или иного математического явления.

Как отмечалось выше, многие полагают, что в математике существует единственный путь к верному решению, поскольку убеждены, что к ответу нужно прийти логично, сжато и рационально. Однако, в математике есть и другие способы решения, приводящие к верному ответу. И они помогают прийти к ответу не менее логично, сжато и рационально. В качестве примера рассмотрим определения предела функции.

Предел функции (предельное значение функции) в заданной точке - такая величина, к которой стремится значение рассматриваемой функции при стремлении её аргумента к данной точке. Понятию предела можно дать несколько определений [1].

Определение по Гейне: значение A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности точек $\{x_n\}$, сходящейся к x_0

($\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$), но не содержащей данную точку x_0 в качестве одного из своих элементов, последовательность значений функции сходится к A, то есть $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Определение по Коши: значение A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого наперёд взятого положительного числа ξ найдётся отвечающее ему положительное число $\delta = \delta(\xi)$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \xi$.

Окрестностное определение: значение A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой окрестности $O(A)$ точки A существует проколотая окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что образ этой окрестности $f(O(x_0))$ лежит в окрестности $O(A)$.

Все эти определения эквивалентны. Очевидно, что ни одно из этих определений не является менее или более рациональным и логичным, нежели остальные, но является ли какое-либо из них более оригинальным? Ответ будет положительным в том случае, если будет использован способ, который в конкретной ситуации реже применяется для решения подобных задач. А именно, способ будет неординарным, необычным и своеобразным, что и является определением оригинальности.

С другой стороны, на оригинальность в математике можно посмотреть с более привычной и обыденной точки зрения. Всем привычен способ запоминания, при котором происходит связь того, что нужно запомнить с тем, что уже хорошо известно. Такой метод называется ассоциативным.

В качестве примеров можно привести огромное количество различных лемм, теорем и т.д.: лемма о змее, теорема о бесконечных обезьянах, лемма о двух милиционерах, лемма о рукопожатиях, парадокс Рассела и др. Оригинальность проявляется не только в ассоциативности названий, но и в самих доказательствах некоторых понятий. Например, лемма Мансиона представлена следующим рисунком.

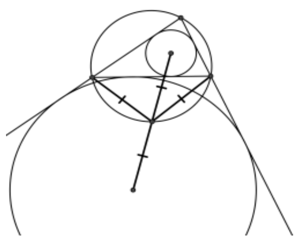

Рис.1.

Рисунок 1 стал причиной двух других названий данной леммы: лемма о трезубце и лемма о куриной лапке. В общем случае лемма гласит, что, если биссектриса, проведенная из угла, лежащего внутри окружности, пересекает описанную окружность в точке, то выполняется равенство выделенных сторон [2].

Еще одним довольно ярким примером можно считать способы решения квадратных уравнений. Квадратные уравнения используются в задачах абсолютно любой сложности. Правильно решенное квадратное уравнение может привести к верному ответу или же может помочь обнаружить ошибку, допущенную ранее. Существует огромное количество способов решения квадратных уравнений: дискриминант, теорема Безу, теорема Виета, решение с помощью номограммы, геометрический способ, графический способ и др. Но самыми популярными, пожалуй, являются решение с помощью теоремы Виета и решение через дискриминант. Разве решить квадратное уравнение, например, с помощью теоремы Безу - это не оригинально? Ведь само по себе наличие такого количества способов, абсолютно самостоятельных и непохожих друг на друга – это очень удивительно. Рассмотрим несколько конкретных примеров решения квадратных уравнений некоторыми способами.

С помощью теоремы Виета решить уравнение

$$x^2 - 11x + 18 = 0.$$

Найдем числа, произведение которых равно 18, и сумма которых равна 11. Эти числа: 2 и 9. Ответ: $x_1 = 2,\ \ x_2 = 9$.

Геометрический способ решения квадратных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$x^2 + 14x - 51 = 0.$$

Начертим квадрат со стороной x. Затем на его сторонах построим прямоугольники таким образом, что другая сторона каждого из них была равна 3.5, следовательно, их площадь равна $3.5x$. Полученную фигуру дополняем до нового квадрата $ABCD$, достраивая в углах четыре равных квадрата, сторона каждого из них 3.5, а площадь 12.25 (рис. 2).

Площадь квадрата $ABCD$ можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата x^2, четырех прямоугольников $14x$ и четырех пристроенных квадратов 49, т.е. площадь квадрата $ABCD$ равна $x^2 + 14x + 49$. Так как $x^2 + 14x = 51$, то площадь квадрата $ABCD$ равна 100.

Отсюда следует, что сторона квадрата $ABCD$ равна 10.

D		x		C
	$12\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}x$	$12\frac{1}{4}$	
x	$3\frac{1}{2}x$	x^2	$3\frac{1}{2}x$	x
	$12\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}x$	$12\frac{1}{4}$	
A		x		B

Рис. 2.

Таким образом, сторона первоначального квадрата получается равной трем.

С помощью теоремы Безу.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x-\alpha)$ равен $P(\alpha)$ (т.е. значению $P(x)$ при $x=\alpha$). Если число α является корнем многочлена $P(x)$, то этот многочлен делится на двучлен $(x-\alpha)$ без остатка [3].

Рассмотрим уравнение: $2x^2-7x+3=0$.

У многочлена $P(x)=2x^2-7x+3$ целые корни могут быть только среди делителей свободного члена, т.е. среди значений: $\alpha=\pm1; \pm3$. Нетрудно заметить, что $\alpha=3-$корень этого многочлена: 18-21+3=0.

Разделим многочлен $P(x)$ на $(x-3)$, получим

$$\left(2x^2-7x+3\right)/(x-3)=(2x-1) \text{ или } \left(2x^2-7x+3\right)=(2x-1)\cdot(x-3).$$

Таким образом, имеем $(2x-1)\cdot(x-3)=0$.

Откуда следует, что $x_1=\frac{1}{2}, \quad x_2=3$.

Ответ: $x_1=\frac{1}{2}, \quad x_2=3$.

Каждый из перечисленных способов является по-своему красивым и уникальным. Но факт остается фактом, в настоящее время многие пути решения не используются вовсе, в результате чего забываются. Так, например, способ решения квадратных уравнений с помощью номограмм сейчас сохранился только на страницах старых учебников.

Подводя итоги, можно сказать, что математика – многогранная, интересная и увлекательная наука, а также можно провести еще одну ассоциацию. Представьте себе двух художников, рисующих море. Один считает, что в картинах другого не хватает оптимизма, в то время как другой думает, что картины первого нарисованы совсем не в том стиле, но в конце концов они оба рисуют море. В математике так же. Каждый способ, каждый путь решения хорош для определенной задачи. Но, воспользовавшись любым другим, вы все равно получите верный ответ, несмотря на то, что «стили» решений будут меняться.

Список литературы:

1. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Учебник для студентов университетов. В 3 т. Т.1./Г.М. Фихтенгольц //– М.: Наука. – 1970. – 608 С.
2. Карасев, Р.Н. Задачи для школьного математического кружка/Р.Н. Карасев, В.Л. Дольников и др.// – М.: – 2017. – 71 С.
3. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа. Учебник для студентов университетов и вузов. В 3 т. Т.1. /Л.Д. Кудрявцев//– М.: Высшая школа. – 1988. – 712 С.