УДК 372.851

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ: ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Ковалёва Е. С., Смирнова П. Д., МБОУ «СОШ № 92», 10 класс
Научный руководитель: Шугалов Б. С.,
канд. физ.-мат. наук, доцент КРИПКиПРО,
г. Кемерово

Наглядные представления о взаимном расположении простейших геометрических фигур в пространстве упорядочиваются путем рассуждений. При этом выделяются такие основные свойства фигур, которые принимаются без доказательств – аксиомы. Другие же свойства – являются теоремами. Они выводятся из аксиом или предварительно доказанных утверждений. Так строится геометрическая теория.

Цель статьи – рассмотреть логические связи между различными утверждениями о взаимном расположении простейших геометрических фигур и представить подходы и методы решения задач на нахождение расстояния между прямыми в пространстве.

Свойства геометрических фигур формулируются через особенности взаимного расположения их элементов. Рассмотрим пример.

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Проведём диагональ A_1C и перпендикулярную к ней прямую AK, проходящую через вершину куба (рис. 1).

Оказывается, *продолжение перпендикуляра, проведённого из вершины куба к его диагонали, пересекает грань куба в её центре.*

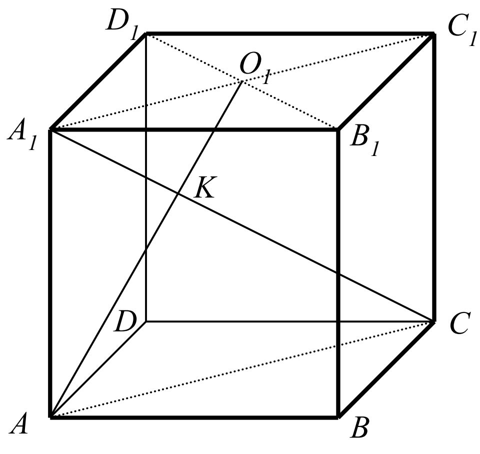

Рис. 1

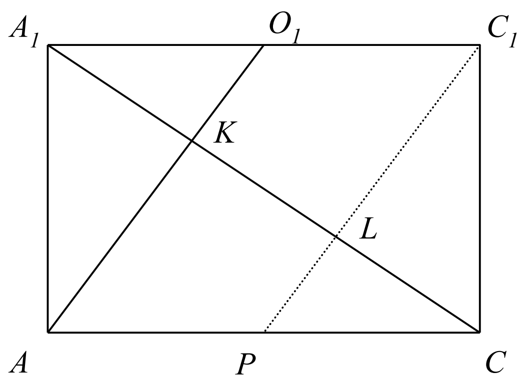

Рис. 2

Доказательство.

Через прямые A_1C и AK проведём плоскость. Эта плоскость проходит через три точки A, A_1, и C, не лежащие на одной прямой. Поэтому она совпадает с плоскостью, проходящей через параллельные прямые AA_1 и CC_1. Сечение куба этой плоскостью называется диагональным сечением; диагональное сечение куба – прямоугольник.

Рассмотрим диагональное сечение куба – прямоугольник AA_1C_1C, в котором прямая AK перпендикулярна диагонали A_1C (рис. 2). Прямая AK пересекает сторону A_1C_1 в точке O_1. Найдём длину отрезка A_1O_1, считая, что сторона $AA_1 = 1$.

Сторона AC как диагональ грани куба с ребром 1 равна $\sqrt{2}$. Треугольники A_1AC и O_1A_1A подобны ($\Delta\, A_1AC \backsim \Delta\, A_1KA \backsim \Delta\, O_1A_1A$, по двум углам). Следовательно, $\frac{A_1O_1}{AA_1} = \frac{AA_1}{AC}$. Отсюда $A_1O_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Выходит, что точка O_1 – середина отрезка A_1C_1. Утверждение о прямой, перпендикулярной диагонали куба, доказано.

Аналогично, продолжение перпендикуляра, проведенного из вершины C_1 к диагонали A_1C, пересекает отрезок AC в его середине, в точке P (рис. 2, точка L – основание перпендикуляра C_1L). Так как $A_1O_1 = O_1C_1$ и $AP = PC$, то, по теореме Фалеса, $A_1K = KL$ и $KL = LC$. Таким образом, основания перпендикуляров, проведенных из вершин куба A и C_1, делят его диагональ A_1C на три равные части.

При решении задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми выясняется целесообразность использования различных определений. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно:

- длине их общего перпендикуляра [3, с. 262];
- расстоянию между параллельными плоскостями, содержащими скрещивающиеся прямые [3, с. 262];
- расстоянию между одной из скрещивающих прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой [2, с. 41].

И еще одно определение расстояния между скрещивающимися прямыми – это расстояние от точки, являющейся проекцией одной из данных прямых на перпендикулярную ей плоскость, до проекции другой прямой на эту же плоскость [4, с. 96]). Применим данное определение к решению следующей задачи.

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $AB = 1$. Найдите расстояние между прямыми CB_1 и BA_1.

Проведем плоскость (ABC_1) (рис. 3). Прямая CB_1 перпендикулярна этой плоскости ($CB_1 \perp BC_1$ и $CB_1 \perp AB$). Поэтому точка F – проекция CB_1 на плоскость (ABC_1). Найдем проекцию BA_1 на плоскость (ABC_1). Проведем DA_1. Так как $DA_1 \parallel CB_1$, а $CB_1 \perp (ABC_1)$, то и $DA_1 \perp (ABC_1)$. Точка P – проекция A_1 на (ABC_1), а значит, PB – проекция BA_1 на (ABC_1).

Проведем $FH \perp PB$. Найдем длину FH.

Сделаем выносной чертеж (рис. 4).

$\Delta FHB \backsim \Delta BAP$, $\frac{FH}{BA} = \frac{FB}{BP}$, $FH = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

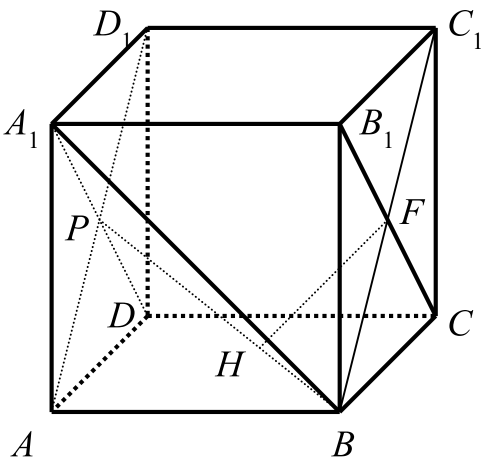

Рис. 3

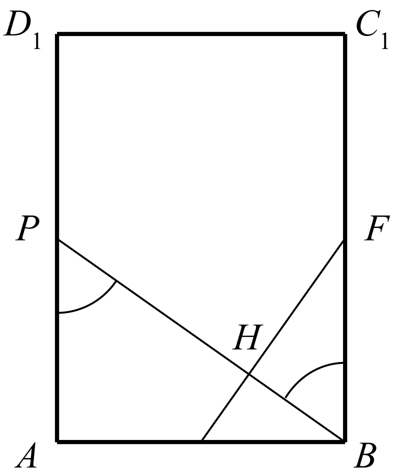

Рис. 4

Координатно-векторный метод решения задачи.

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке B, направив оси так, как это показано на рисунке 5.

Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми координатно-векторным способом находим направляющие векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ данных прямых, затем нормальный вектор $\vec{n}$ из условия перпендикулярности $\vec{n}$ к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. И наконец, определив координаты вектора $\vec{v}$ с концами на данных прямых, находим модуль его проекции на вектор $\vec{n}$ [1].

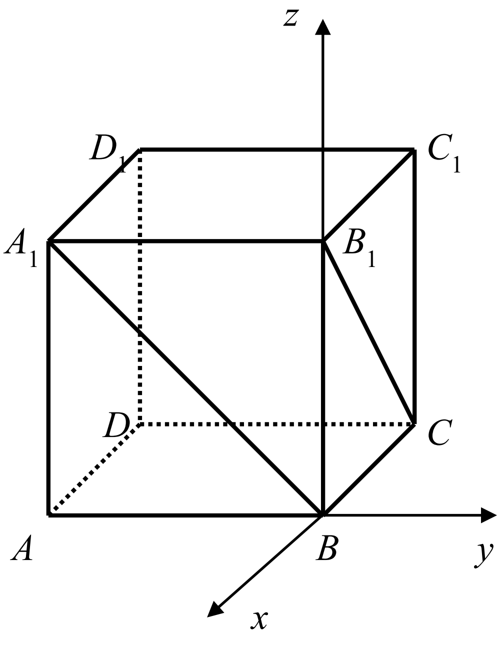

Рис. 5

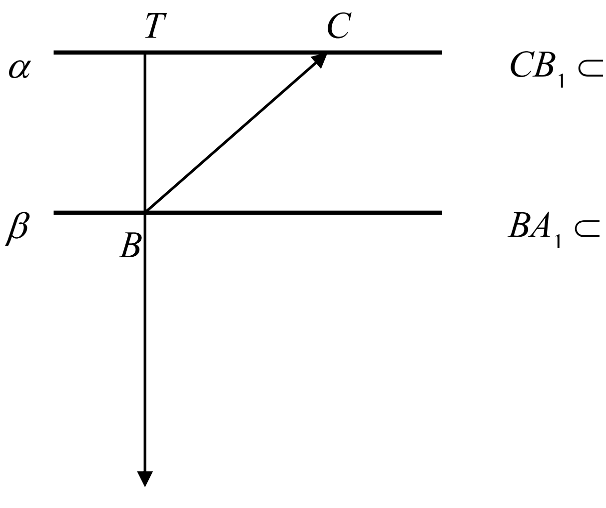

Рис. 6

Координаты точек: $B(0; 0; 0)$, $A_1(0; – 1; 1)$, $C(– 1; 0; 0)$, $B_1(0; 0; 1)$.

Координаты векторов: $\overrightarrow{CB_1}(1;0;1)$, $\overrightarrow{BA_1}(0;\,-1;1)$, $\overrightarrow{BC}(\,-1;0;0)$.

Координаты нормального вектора $\vec{n}(p,q,r)$ найдем из условия $\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0$ и $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0$, или, в координатной форме,

$p\cdot 1 + q\cdot 0 + r\cdot 1 = 0$ и $p\cdot 0 + q\cdot(-1) + r\cdot 1 = 0$.

Отсюда координаты q и r можно выразить через p: $q = r = -p$.

При $p = 1$ находим координаты одного из нормальных векторов: $\vec{n}(1;-1;-1)$. Наконец, находим проекцию вектора BC на направление $\vec{n}$ (рис. 6).

$$\rho(CB_1,BA_1)=\left|\text{пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{BC}\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{|1\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Задача о трех плоскостях.

Две плоскости в пространстве либо параллельны, либо пересекаются. Рассмотрим вопрос о трех плоскостях.

Каковы все возможные варианты взаимного расположения трех различных плоскостей?

Предварительное, опирающееся на наглядные представления решение задачи приводит к пяти вариантам взаимного расположения трех плоскостей.

1. Плоскости α, β и γ параллельны, никакие две из них не имеют общих точек.
2. Три плоскости пересекаются по одной общей прямой.
3. Две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью.
4. Плоскости пересекаются по трем различным прямым, имеющих общую точку.
5. Плоскости пересекаются по трем различным параллельным прямым.

Исчерпывают ли перечисленные случаи все варианты взаимного расположения трех плоскостей. Если – нет, то необходимо предъявить отличный от указанных вариантов дополнительный вариант. Если – да, то нужно убедиться в полноте представленного решения, доказать невозможность других вариантов расположения трех плоскостей. Для разрешения возникшей дилеммы уточним понятие варианта.

Два варианта различны, если они отличаются по числу прямых пересечения; два варианта с одинаковым числом прямых пересечения различны, если они отличаются по взаимному расположению этих прямых (две прямые в пространстве либо параллельны, либо пересекаются, либо не лежат в одной плоскости).

Рассмотрим случай, когда три различные плоскости пересекаются по двум прямым.

Пусть $a(\alpha,\beta)$ – прямая пересечения плоскостей α и β, $a(\alpha,\gamma)$ – другая прямая – пересечение плоскостей α и γ. Эти прямые принадлежат плоскости α, поэтому они не являются скрещивающимися прямыми.

Что можно сказать о плоскостях β и γ?

Исключается случай пересечения этих плоскостей по прямой, отличной от прямых $a(\alpha,\beta)$ и $a(\alpha,\gamma)$ (в этом случае число прямых пересечения было бы равно трем). Допустим, что прямая пересечения плоскостей β и γ – $a(\beta, \gamma)$ совпадает с прямой $a(\alpha, \beta)$. Но тогда прямая $a(\beta, \gamma)$ принадлежит всем трем плоскостям, плоскости α, β и γ пересекаются по этой прямой. А значит, и прямая $a(\alpha, \gamma)$ совпадает с прямой $a(\beta, \gamma)$. Пришли к противоречию: по условию, прямые $a(\alpha, \beta)$ и $a(\alpha, \gamma)$ – различные прямые. Аналогично, исключается предположение о совпадении прямых $a(\beta, \gamma)$ и $a(\alpha, \gamma)$.

Итак, плоскости β и γ параллельны. А из параллельности двух плоскостей, пересекаемых третьей плоскостью, следует параллельность прямых пересечения, $a(\alpha, \beta) \parallel a(\alpha, \gamma)$ (вариант 3).

Наконец рассмотрим случай, когда плоскости пересекаются по трем различным прямым. Докажем следующую теорему.

Если три различные плоскости пересекаются по трем различным прямым, то эти прямые либо параллельны, либо пересекаются в одной точке.

Пусть $a(\alpha, \beta)$, $a(\alpha, \gamma)$ и $a(\beta, \gamma)$ – различные прямые пересечения плоскостей α, β и γ. Ясно, что никакие две из них не являются скрещивающимися прямыми.

Предположим, что две прямые пересекаются, $a(\alpha, \beta)$ и $a(\alpha, \gamma)$. Тогда точка их пересечения C принадлежит все трем плоскостям и, в частности, плоскости β и γ. А значит, и прямая пересечения этих плоскостей проходит через точку C. Различные прямые пересекаются в одной точке (вариант 4).

Если же две прямые параллельны, то третья прямая не может пересекаться ни с одной из них (в противном случае, все прямые пересекаются в одной точке). А значит, из параллельности двух прямых следует параллельность любой пары прямых пересечения (вариант 5).

Заключение.

При решении задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми показана целесообразность использования разных определений этого понятия и эффективная применимость координатно-векторного метода при решении таких задач.

Рассмотрена задача о всевозможных вариантах взаимного расположения трех различных плоскостей. Данное решение – это логический вывод на основе вариантов взаимного расположения двух плоскостей и двух прямых. Оно обосновывает полноту предварительных наглядных представлений о расположении трех плоскостей.

Список литературы

1. Бардушкин, В. В. Обобщающее повторение темы «Решение заданий С2 координатно-векторным способом». Часть 2 / В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев // Математика в школе. – 2013. – № 1. – С. 8 – 18.

2. Геометрия, 10 – 11: Учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 2002. – 206 с.

3. Погорелов, А. В. Геометрия: Учеб. для 7 – 11 кл. общеобразоват. учреждений / А. В. Погорелов. – М.: Просвещение, 1997. – 383 с.

4. Шарыгин, И. Ф. Геометрия. 10 – 11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений / И. Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2009. – 236 с.