УДК 519.95

КОМБИНИРОВАННАЯ ФОРМУЛА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Головач А.А., Гринблат Д.А., студенты гр. ГМс-161, 2 курс,
Подкур П.Н., к.ф.-м.н., доцент
Научный руководитель Гоголин В.А. д.т.н., профессор,
зав. кафедрой математики Кузбасского государственного
технического университета им. Т.Ф. Горбачева,
г. Кемерово

Работа посвящена развитию численного метода интегрирования на основе разложения функции в степенной ряд Тейлора на малых интервалах.

Имеются два основных способа приближенного интегрирования: разложение функции в ряд Тейлора на интервале интегрирования; суммирование площадей элементарных фигур по малым интервалам разбиения промежутка интегрирования [1, 2].

Рассмотрим пример вычисления интеграла $\int_0^4 \ln(1+x)dx$ различными способами.

Найдем точное значение указанного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница методом интегрирования по частям:

$$\int_0^4 \ln(1+x)dx = x\ln(1+x)\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{x}{x+1}dx = 4\ln 5 - (x-\ln(x+1))\Big|_0^4 = 5\ln 5 - 4 \approx 4{,}0472.$$

Найдем приближенное значение этого интеграла.

1. Вычисление интеграла путем разложения интегрируемой функции в ряд Тейлора в промежутке интегрирования.

Область сходимости ряда разложения функции $y=\ln(1+x)$ в точке $x=0$ есть интервал: $(-1;1]$. Промежуток интегрирования не входит в область сходимости ряда, поэтому способ разложения функции в ряд Тейлора не может быть использован.

2. Рассмотрим второй способ: формулы численного интегрирования. Зададим число интервалов равное 4, тогда длина каждого интервала равна 1. Для вычисления интеграла составляем таблицу значений функции в граничных точках интервалов.

x	0	1	2	3	4
y	0	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094

Значения интеграла по наиболее точной формуле парабол Симпсона вычисляется как:

$$\int_0^4 \ln(1+x)dx \approx \frac{1}{3}\cdot(1{,}6094+4\cdot(0{,}6931+1.3863)+2\cdot 1{,}0986)=4{,}0414.$$

Относительная ошибка вычисления интеграла по формуле парабол равна 0,14%.

3. В предлагаемом нами способе предлагается комбинация двух этих способов. Промежуток интегрирования разбивается на равные интервалы, на каждом из которых вычисляется интеграл разложением в свой степенной ряд в центральных точках каждого интервала до определенной степени.

Рассматриваем первое приближение с разложением функции в степенной ряд до второй степени на каждом *i*-том интервале $[x_{2i-2}; x_{2i}]$ с центральной точкой x_{2i-1}.

Всего точек *n*=2*k*, где *k* – число сдвоенных интервалов. Расстояние между двумя точками равно $h=\frac{b-a}{n}$. Интегрируем разложением функции в степенной ряд по каждому интервалу:

$$\int_{2ih}^{2(i+1)h} y(x)dx \approx \int_{2ih}^{2(i+1)h} [y(x_{2i-1})+y'(x_{2i-1})(x-x_{2i-1})+y''(x_{2i-1})(x-x_{2i-1})/2]dx =$$

$$=2hy_{2i-1}+\frac{h^3}{3}y''_{2i-1}. \tag{1}$$

Тогда суммируя по всем двойным интервалам, получим комбинированную формулу численного интегрирования

$$\int_a^b y(x) \approx 2h\sum_{i=1}^{k} y_{2i-1}+\frac{h^3}{3}\sum_{i=1}^{k} y''_{2i-1}. \tag{2}$$

Вычислим рассмотренный выше интеграл по предлагаемой формуле. Для этого предварительно найдем значения вторых производных интегрируемой функции $y=\ln(1+x)$ в центральных точках интервалов [0; 2] и [2; 4], то есть при *x*= 1 и *x* =3. Находим $y''(1)=-0{,}25;\ y''(3)=-0{,}0625.$

$$\int_0^4 \ln(1+x)dx \approx 2\cdot(0{,}6931+1{,}3863)+\frac{1}{3}\cdot(-0{,}25-0{,}0625)=4{,}0546.$$

Относительная ошибка приближенного значения интеграла составляет 0,33%.

Для более точного вычисления интегралов нужно увеличить степень разложения интегрируемой функции в степенной ряд. Так, если разложение интегрируемой функции взять до четвертой степени *x*, и провести интегрирование этого разложения функции так же, как в (1), то в формуле (2) добавится дополнительное слагаемое. Тогда комбинированная формула численного интегрирования будет иметь следующий вид:

$$\int_a^b y(x) \approx 2h\sum_{i=1}^{k} y_{2i-1}+\frac{h^3}{3}\sum_{i=1}^{k} y''_{2i-1}+\frac{h^5}{60}\sum_{i=1}^{k} y^{(IV)}_{2i-1}. \tag{3}$$

Вычислим тестовый интеграл по формуле (3).

$$\int_0^4 \ln(1+x)dx \approx 2.(0{,}6931+1{,}3863)+\frac{1}{3}\cdot(-0{,}25-0{,}0625)+\frac{1}{60}(-0{,}375-0{,}0234)=4{,}048.$$

В этом случае относительная ошибка приближенного значения интеграла составляет 0,02%.

Таким образом, полученные комбинированные формулы численного интегрирования позволяют с большей точностью вычислять приближенное значение интеграла с меньшим числом точек разбиения промежутка интегрирования.

Список литературы:

1. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа/ А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. СПб: Лань.– 2005. – 736 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука.–1973. – 631 с.