УДК 513

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПАРАБОЛОЙ И ПРЯМОЙ

Булыгин И. А., Камышникова Н. О., студенты гр. БЭс-171, I курс,
Дягилева А. В., к.т.н, доцент
Научный руководитель: Ермакова И. А., д.т.н., профессор
Кузбасский государственный технический университет
г. Кемерово

На занятиях по математике мы часто сталкиваемся с заданием: найдите расстояние от точки до прямой. Известна формула нахождения этого расстояния [1]:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad (1)$$

где задана прямая $Ax + By + C = 0$ и некая точка M_0 (x_1; y_1).

Однако когда мы сталкиваемся с заданием, где надо найти расстояние от графика функции до прямой, возникает вопрос, как это сделать, поскольку нет общей формулы, которая упрощала бы все эти вычисления.

В данной работе мы постараемся вывести формулу расстояния от параболы до прямой. Имеется ввиду, что это расстояние – минимальное.

Возьмём конкретную параболу: $y = 2x^2$, и прямую $y = 4x - 4$, построим их графики.

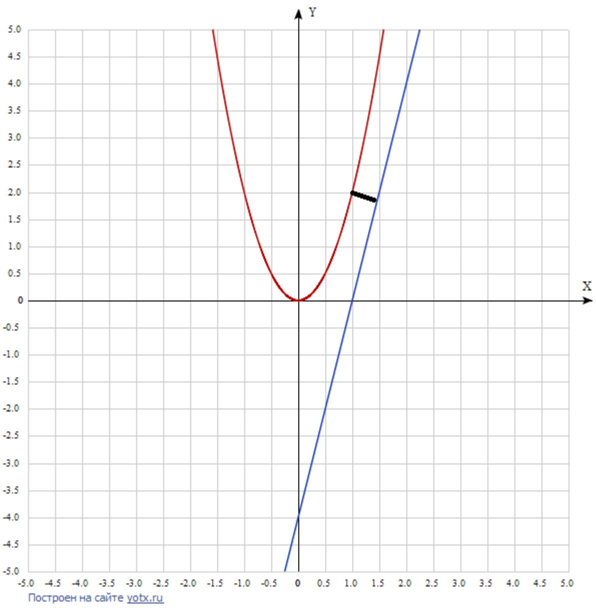

Рис.1 Схема определения расстояния от точки параболы до прямой

Из геометрического смысла производной [2] знаем, что производная равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке, значит:

$$y'(x) = 4x = k \ .$$

Вычислим координаты точки параболы, расстояние от которой до прямой мы будем вычислять:

$$x_1 = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1; \ y_1 = 2 \cdot 1^2 = 2.$$

Все данные подставляем в исходную формулу и получаем:

$$d = \frac{|4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{17}} \approx \frac{2}{4,1} \approx 0,49 \ .$$

Теперь выведем общий алгоритм нахождения расстояния от параболы до прямой. Имеем уравнения параболы и прямой: $y = ax^2$ и $y = kx + b$.

При этом должно выполняться условие, что прямая и парабола не пересекаются, то есть: $ax^2 \neq kx + b$(см. рис.1).

Вычисляем координаты точки параболы:

$$y'(x_1) = 2ax_1 = k; \ \ x_1 = \frac{k}{2a}; \ y_1 = a\frac{k^2}{4a^2} = \frac{k^2}{4a} \ .$$

Полученные данные подставим в формулу (1) и получим:

$$d = \left| \frac{kx_0 - y_0 + b}{\sqrt{k^2 + 1}} \right| = \left| \frac{\frac{k}{2a} - \frac{k^2}{4a} + b}{\sqrt{k^2 + 1}} \right| = \frac{1}{4|a|} \left| \frac{k^2 + 4ab}{\sqrt{k^2 + 1}} \right| \ .$$

Таким образом, мы получили формулу нахождения расстояния от параболы с центром в точке (0;0) до прямой, которая имеет вид:

$$d = \frac{1}{4|a|} \left| \frac{k^2 + 4ab}{\sqrt{k^2 + 1}} \right| \qquad (2)$$

Теперь рассмотрим общий случай, когда парабола имеет вершину с координатами (x_0; y_0) и ветвями, направленными вверх (вниз). Уравнения параболы и прямой имеют вид:

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2 \quad \text{и} \quad y = kx + b \ .$$

При этом выполняется условие того, что парабола и прямая не пересекаются: $a(x - x_0)^2 + y_0 \neq kx + b$ (см. рис.1).

По аналогичному алгоритму действий, производим расчеты:

$$y'(x_1) = 2a(x_1 - x_0) = k;$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{k}{2a} + x_0 = \dfrac{k + 2ax_0}{2a} \\ y_1 = y_0 + a\left(\dfrac{k}{2a} + x_0 - x_0\right) = y_0 + \dfrac{k^2}{4a} \end{cases}$$

Подставляя координаты точки в уравнение (1), получаем

$$d = \left|\frac{kx_1 - y_1 + b}{\sqrt{k^2+1}}\right| = \left|\frac{k\left(\dfrac{k}{2a} + x_0\right) - \left(y_0 + \dfrac{k^2}{4a}\right) + b}{\sqrt{k^2+1}}\right| = \frac{1}{4|a|}\left|\frac{k^2 + 4akx_0 - 4ay_0 + 4ab}{\sqrt{k^2+1}}\right| .$$

В конечном итоге, мы получаем формулу для нахождения расстояния от параболы с вершиной в точке (x_0; y_0) до прямой:

$$d = \frac{1}{4|a|}\left|\frac{k^2 + 4akx_0 - 4ay_0 + 4ab}{\sqrt{k^2+1}}\right|. \quad (2)$$

В продолжение темы нашей работы мы также вывели формулу для нахождения расстояния между параболой с ветвями, направленными вправо (влево), и прямой. Уравнение такой параболы имеет вид: $x - x_0 = a(y - y_0)^2$, а уравнение прямой с угловым коэффициентом запишем как: $x = ky + b$. Так же, как и в рассмотренном выше случае считаем, что парабола и прямая не пересекаются.

Сравнивая уравнения парабол и уравнения прямых в первом и во втором случае, видим, что они одинаковые, если y и x поменять местами.

Поэтому, если в формуле (2) y и x поменять местами, то мы получим формулу для вычисления расстояния между параболой и прямой в этом случае, а именно:

$$d = \frac{1}{4|a|}\left|\frac{k^2 + 4aky_0 - 4ax_0 + 4ab}{\sqrt{k^2+1}}\right|. \quad (3)$$

Вывод:

В данной работе получены формулы для вычисления расстояния между параболой и прямой (2; 3). По нашему мнению, полученные формулы позволяют ускорить процесс решения студентами конкретных примеров.

Список литературы:

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст]: учебник для студентов вузов / Д. В. Беклемишев. – М. Физматлит, 2008.– 312 с.

2. Гоголин В. А. Математический анализ [Текст]: учебное пособие для студентов технических и экономических направлений, изучающих дисциплины «Математика» и «Математический анализ» / В. А. Гоголин, И. А. Ермакова; ФГБОУ ВО «Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева», Кемерово: Издательство КузГТУ. – 2016.– 114 с.