УДК 519

О ПРИМЕНЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ К ОПИСАНИЮ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Акашева К.В., студентка гр. ИТб-162, II курс,
Карнадуд О.С., к.т.н., доцент кафедры математика

Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

На сегодняшний день целью математических моделей и их построения считают нахождение количественных связей между параметрами, условиями (вход системы, показателями выхода). Построение данных моделей тесно связано с оценкой эффективности технологических процессов. Обычно технологические модели (процесс) строятся непосредственно опираясь на математическую модель. Следует отметить, что в некоторых случаях целостностное аналитическое описание некого объекта невозможно, и при построении технологических моделей прибегают к эмпирическим зависимостям. Обычно, технологические модели строят для исследования некоторых частей технологической системы. Многие технологические процессы, довольно сложны для описания их обобщенной модели, которая бы адекватно рассматривала все стороны процесса. Поэтому при моделировании используют принцип «декомпозиции», подвергающий моделированию все свойства технологического процесса.

Как известно, математическая модель – это некоторая совокупность математических объектов (уравнений, систем, неравенств, алгебраических выражений и др.), описывающих с помощью математических символов исследуемый объект и его отношения с окружающим миром. Под математическим моделированием подразумевается процесс установления соответствия определённому реальному объекту некоторого математического объекта, который и является математической моделью, и исследование модели, позволяющее определить характеристики рассматриваемого реального объекта.

Под математическим моделированием, в данном случае в технике, имеют ввиду адекватную замену изучаемого технического устройства математической моделью и ее дальнейшее изучение с использованием способов вычислительной математики и средств вычислительной техники.

Среди преимуществ математического моделирования выделяют в основном:

— экономичность (сбережение ресурсов);
— возможность моделирования гипотетических объектов;
— возможность реализации процессов, невозможных или трудновоспроизводимых в реальности;
— возможность изменения масштаба времени;
— простота многоаспектного анализа;
— возможность прогнозирования на основе выявления общих закономерностей;
— техническое и программное обеспечение для моделирования.

Математическим моделированием технологических процессов называют некое исследование, которое осуществляется с помощью решения системы математических отношений, раскрывающих сам технологический процесс. Данное исследование проходит некоторые этапы:

- составляется описание модели процесса;

- выбирается решение необходимых уравнений, для дальнейшего нахождения необходимых параметров;
- устанавливается «адекватность» построенной модели реальной.

С помощью построения математической модели реальный процесс существенно упрощается, составляются схемы, и данные схемы описываются неким мат.аппаратом. В случае, технологических процессов, математическое описание есть ни что иное как система уравнений(алгебраических, дифференциальных и т.д.).

Если рассматривать математическую модель и ее анализ, следует выделить три стороны:

- физическое описание модели отображает такой элемент, как Смысловая сторона;
- систему уравнений описывает Аналитическая сторона;
- некие методы решения, поиски алгоритмов, реализация модели - рассматривает Вычислительная сторона.

Наиболее сложным этапом в математическом моделирование технических процессов является линейное программирование. Линейное программирование –это задача, позволяющая сделать выбор наилучшего результата, в которой имеется некая целевая функция(представляет собой линейную функцию своих параметров) и ограничения (представлены в виде линейных уравнений и неравенств, чаще в системой уравнений).

Линейное программирование стало необходимым, с появлением задач экономики, которые все время стремятся к нахождению оптимального использования ресурсов и максимизации прибыли. Это и стало основой использования математических моделей. Также важно, что реальной экономики (задачи) число параметров очень велико(1000, 1000000 и тд.). Следовательно, практическое решение задач и создание алгоритмов невозможно для человека.

Рассмотрим линейную целевую функцию с одной переменной:

$\boldsymbol{F(Y,X) = A + BX + CY}$, (1)

причем линейная модель физического процесса выражается как

$\boldsymbol{Y = D + EX}$(2)

Подставив (1) в (2), получим G–форму целевой функции:

$$\boldsymbol{G(X) = A + BX + CD + CEX} \text{или} \boldsymbol{G(X) = \Psi_0 + \Psi_1 X},$$

где $\boldsymbol{\Psi_0 = A + CD}$;

$\boldsymbol{\Psi_1 = B + CE}$.

Видно, что при $\boldsymbol{\Psi_1 > 0}$ максимум достигается при **X = + ∞,** а минимум – при **X = – ∞.**

Таким образом, линейные целевые функции (как с одной переменной, так и с n–переменными) при отсутствии ограничений не имеют конечной совокупности оптимальных решений, поэтому в задачах оптимизации целевой функции ограничения играют принципиальную роль. В дальнейшем будет показано, что совокупность любого числа линейных ограничений выделяет в пространстве $\boldsymbol{X_1, X_2, \ldots, X_n}$ некоторый выпуклый многогранник области возможных значений переменных управления. Экстремум целевой функции достигается в одной из его вершин.

При этом линиями равного уровня целевой функции являются линии, соединяющие точки, в которых значения целевой функции равны друг с другом. Для линейной функции с 2 управляющими переменными: $\boldsymbol{G = \Psi_0 + \Psi_1 X_1 + \Psi_2 X_2}$, равноуровневые линии, изображённые на плоскости $(\boldsymbol{X_1, X_2})$, представляют собой прямые линии типа:

$$\boldsymbol{X_2 = \frac{G - \Psi_0}{\Psi_2} + \frac{\Psi_1}{\Psi_2} X}$$

На рис. 1 изображены линии равных уровней, являющиеся параллельными.

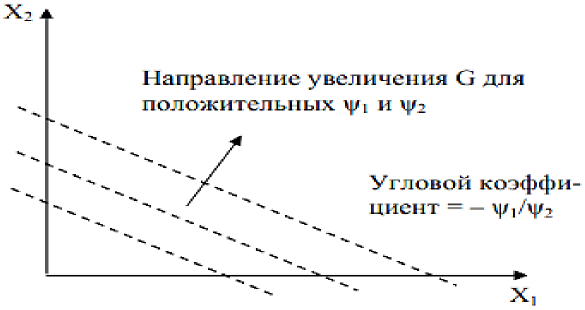

Рис. 1. Линии равного уровня целевой функции

Для наглядности рассмотрим задачу на примере двух Магазинов игрушек.

На двух складах «А1» и «А2» имеется 1000 плюшевых медведей, на складе А1-350, А2-650. Необходимо данный товар доставить в два магазина «Лучик» и «Зайчик», известно, что в магазин «Лучик» необходимо доставить 800 плюшевых медведей, а в магазин «Зайчик» всего 200.

Стоимость доставки представлена в виде таблицы:

Склад/Магазин	Лучик	Зайчик	Имеется
А1	150	365	350
А2	200	186	650
доставлено	800	200	1000

Необходимо, составить такой план, по которому стоимость доставки будет наименьшей (т.е минимизировать затраты). Составим математическую модель задачи.

Введем обозначения:

$X_{1,2}$-Плюшевые медведи доставляемые со склада А1

$X_{3,4}$-Плюшевые медведи доставляемые со склада А2

Целевая функция :$F = \ 150X_1 + 365\,X_2 + 200\,X_3 + 186\,X_4 \to min$

Ограничения: $\begin{cases} 150X_1 + 200X_3 = 800 \\ 365X_2 + 186X_4 = 200 \\ 150X_1 + 365X_2 = 350 \\ 200X_1 + 186X_2 = 650 \end{cases}$

В завершение хотелось бы отметить, что моделирование тех. процессов и систем математическим методом - это хоть и не единственно возможная, но очевидно одна из наиболее используемых и полезных методик исследования систем, элементов и процессов. Использование моделей, в нашем случае математических, даёт возможность с их помощью решать сложные задачи исследования, прогнозирования и оптимизации технологических процессов в машиностроении. На сегодняшний день для более интенсивного использования математических моделей имеется огромнейшее число различных предпосылок. Огромнейшее количество созданного (благодаря активно растущему техническому прогрессу, математическому и программному обеспечению для специалистов) сделало моделирование практически повсеместно используемым профессиональным инструментом для решения сложных задач оптимального технологического проектирования.

Список литературы:

1. Штерензон, В. А. Моделирование технологических процессов: конспект лекций / В. А. Штерензон; Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2010. – 66 с.
2. Математическое моделирование технологических процессов и производств: учебное пособие / В. И. Гузеев. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – 102 с.
3. Математическое моделирование технологических процессов: курс лекций / В.Б. Пономарев, А.Б. Лошкарев. Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2006. – 129 с.