УДК. 514

МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Шихалиева М.А., студентка гр. МСб-171, I курс, Челнакова И.Г.,
ст. преподаватель кафедры НГиГ
Научный руководитель: Шумкина Т.Ф. , зам. директора по научно-инновационной работе
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева, г. Кемерово

В наше время широкое применение получила многомерная геометрия в математике и физике для визуального представления уравнений с несколькими неизвестными, функций нескольких переменных и систем с несколькими степенями свободы. Геометрия является одной из старейшей отраслей математики, используемой древними цивилизациями в строительстве зданий и разметки земли [1].

К большинству задач, решаемых с помощью многомерной геометрии, относятся задачи о нахождении более выгодных вариантов перевозок, задачи о наиболее выгодных способах раскроя материала, более эффективных режимах работы предприятий, задачи о составлении производственных планов и т. п. Тот факт, что эти задачи решаются геометрически с помощью нахождения наибольших или наименьших значений линейных функций на многогранниках (причём, как правило, в пространствах, имеющую размерность, большую трёх) был впервые подмечен Л. В. Канторовичем. Необходимость рассмотрения n-мерных пространств при $n > 3$ диктуется также математическими задачами физики, химии, биологии и других областей знания.

Таким образом, простор окружающей среды хорошо описывается в геометрическом трёхмерном пространстве. Потребности людей приводят к необходимости рассмотрения пространств любой размерности n .

Целью данной работы является рассмотрение некоторых способов построения многомерных пространств и разнообразных геометрических образов в этих пространствах; приведение примеров эксплуатации многомерной геометрии.

Многомерная геометрия – это геометрия объемности. Сама геометрия зародилась в Египте, затем пришла и в Элладу.

Первоначально она предназначалась для использования в трёхмерном пространстве, а уже после сформировалась для n-мерный пространств. Разделения трёх- и многомерная геометрия имеет значение, так как задачи могут быть для любого числа измерений. Построение геометрии пространств для n-измерений проводится по аналогии со случаем трёх измерений. При этом можно опираться на те или иные системы её аксиом или из обобщения её аналитической геометрии, перенося её основу геометрии трехмерный пространств на n по аналогии. Именно так и начиналось построение n-мерной евклидовой геометрии. Исторически представление в более чем 3-мерном пространстве зарождалась постепенно; первоначально – на почве геометрического представления степеней: a^2 – «квадрат», a^3 – «куб», a^4 – «биквадрат», a^5 – «кубоквадрат» и т. д. (ещё у Диофанта в 3 в. и далее у ряда средневековых авторов). Первым, кто начал работать над многомерной геометрией был И. Кант (1746), а о применении 4-й координаты времени говорил Ж. Д'Аламбер (1764). Построение евклидовой многомерной геометрии было осуществлено А. Кэли (1843), Г. Грассманом (1844) и Л. Шлефли (1852).

Двумерное пространство описывается двумя координатными числами и двумя осями координат, трехмерное тремя осями и т.д., но для нас уже тяжело представить четырехмерное пространство, потому что в нем перпендикулярны уже не три координатные оси, а четыре. Но для нас, как обитателей трехмерного пространства, просто невозможно вообразить четыре перпендикулярные линии. Все это может быть построено лишь в наших размышлениях потому, что мы никогда не сможем в полной мере отобразить физику пространства на мерность больше нашего.

В мерных пространствах существует немало парадоксов. Например, круг с оболочкой находится в двумерной поверхности. Находясь в этой плоскости физически невозможно вынуть кружок из колеса, но как только мы воспользуемся трехмерным пространством, можем вынуть круг из оболочки вытолкнув его через третье направление, создающее пространство. Таким же образом поступить со сферой в трёхмерном пространстве нам не предоставляется возможным, но вынуть шар из оболочки сферы можно через четырехмерное пространство. И то, это сделать не удастся никому из живущих в нашем трехмерном мире. Возникает мысль, о четвертом измерении приводя как довод.

Нет ничего нелогичного или противоречивого в том, чтобы рассматривать четвёрки чисел (x_1, x_2, x_3, x_4), исследовать свойства этих «четырёхмерных точек», составлять из них фигуры, доказывать теоремы, постоянно строя таким образом, геометрию четырехмерного (или, вообще n-мерного) пространства. Но математическая непротиворечивость n-мерной геометрии ещё недостаточна для суждения о ценности этой теории, но её использование является неотъемлемой частью таких наук, как физика, математика, строительство, начертательная геометрия и компьютерная графика, и другие сферы применения.

Для представления n-мерных измерений с числом $n>3$ нужно начать с простого или с самого начала. Можно начать с представления нулевого измерения. Это точка. Да, в нулевом пространстве существует только точка, что является началом всего. В мире, мерность которого ноль, не может быть предметов, физических законов, ведь там даже линий нет. В нуль-мерности есть только точка - начало, мысль, идея.

Теперь можно говорить о появлении прямых линий. Главным его представителем является прямая линия с заданным началом отсчета и значениями, которые могут быть положительными и отрицательными относительно своего положения: если слева приняты отрицательные, то справа соответственно положительные. В данном пространстве положение точки или тела принятого за точку может быть задано всего одним числом – координатой. Значит прямая линия – координатная прямая. Но здесь находится начало, т.е. рождение мысли - точка - и её начало развития - прямая линия.

В двухмерном пространстве дела обстоят чуточку сложнее. К одной координатной прямой добавляется ещё одна. Она пересекает заданную прямую и перпендикулярна ей. Эти две перпендикулярные координатные прямые образуют плоскость, и любая точка данной плоскости теперь задается двумя числами – абсциссой и ординатой. В этом измерении уже происходит развитие и начальное формирование. Здесь уже могут существовать элементарные и простые завершенные идеи. Они обладают потенциалом хранить в себе проекции других пространств с большей мерностью. Данные условия мы довольно часто встречаем и используем для задания положений тел на плоскости и решения типовых задач ещё из курса школьной геометрии, поэтому для нас они привычны и не являются новыми. Но мы используем двухмерное пространство в основе для решения своих повседневных задач очень часто, что даже не придаем этому значения. Мы используем двухмерную плоскость для представления нашего трехмерного пространства: проецируем все тела, что мы видим в объеме на плоскость. Мы постоянно пользуемся этим свойством – представлять тело в разных многомерных измерениях. Если представить, как точка перемещается по длине, то превращается в линию, не имеющую ширину или долготу. Если мы согнём и совместим концы этой линии, то точка будет перемещаться по кругу, при этом условия перемещения для этой точки не изменятся, она продолжит двигаться вдоль по линии. То есть, изгибая двухмерное пространство, мы получаем третье.

Все объекты, что мы видим, представлены трёхмерным измерением. Данное измерение задаётся уже тремя числами, абсциссой, ординатой и аппликатой (x, y, z), т.е. появляется ещё одна прямая, что перпендикулярна к двум другим прямым, задающим плоскость. Данное измерение мы наблюдаем своими глазами каждый день, но мы не часто сталкиваемся с решением задач в трехмерном пространстве. Нам проще использовать бумагу и ручку, ведь так? Но, когда появляется необходимость рассмотреть условия поподробнее мы прибегаем в трехмерному пространству. Мы часто решаем задачи с трехмерными телами на плоскости. Но представлять тела из трехмерного пространства в двухмерном сложно, и тогда приходится обращаться к 3D формам.

Представить четырехмерное пространство довольно сложно, а пространства с большей размерностью уже почти невозможно. Логически данное измерение задаётся уже четырьмя числами, но это вряд ли прояснит ситуацию. Логически можно было бы попытаться провести 4 прямую перпендикулярную трём другим, но это уже не представляется возможным. Поэтому проще всего действовать по аналогии. Представим тело в одномерном пространстве – прямая с двумя точками. Это плоское тело, представляющее собой прямую линию и имеющую концы, обозначенные точками – вершинами. Далее в двухмерном пространстве тело имеет форму равностороннего треугольника с тремя вершинами и тремя рёбрами. В трехмерном пространстве треугольник имеет аналог – правильный тетраэдр. Теперь, чтобы продолжить последовательность для размерности четыре, стоит заметить, что прямая, треугольник и тетраэдр имеют две, три и четыре вершины соответственно. Тогда, продолжая последовательность, создается фигура с рёбрами. Все вершины тел в двух, трех и четырехмерном пространствах соединены рёбрами. Тогда, соединяя пять вершин получаем десять ребер, с десятью гранями и пятью тетраэдрами для каждой четверки вершин. Всё усложняется тем, что грани могут перемешиваться и даже пересекаться.

В четырёхмерном пространстве трёхмерные тела содержаться с условием времени – продолжительность. То есть тело, которое мы видим перед нашими глазами сейчас, и тело, которое было минуту назад, будут являться прямой в четвертом измерении. Это как растянуть тело в пространстве, если бы оно было пластилином. Мы видим четырехмерный мир в трёхмерном разрезе, как четырехмерный мир в двухмерной плоскости.

Как мы заметили, что прямая линия в одномерном пространстве может принимать замкнутый круг, образуя двумерное, так и трёхмерный мир, искривляясь, образует четырехмерный. Прямая линия, представляющая тело с учётом времени в четвёртом измерении также изгибается в пятом измерении, представляя гигантскую структуру с всевозможными вариантами и исходами, ответвляющимися в любой момент времени. Получается, чтобы вернуть тело туда, где оно находилось минуту назад, достаточно изогнуть четвертое измерение, которое мы видим, через пятое – изменение тела в пространстве через изгиб времени (ещё проще – телепортация). Но чтобы не возвращать тело в то состояние, в котором оно было минуту назад, а изменить будущую судьбу тела, пятое измерение изгибается через шестое, тем самым меняя судьбу тела с данного изначально варианта исхода события на другое.

Таким образом, каждое измерение является искривлением, разрезом и протяжением каждого последующего, являясь его частью. Наш внешний мир удивителен и разнообразен и чтобы его видеть в разных пространствах. Нужно развивать пространственное воображение у каждого человека.

Список литературы:

1. Шумкина, Т.Ф., Челнакова И.Г. Интеграция геометрических объектов в реальной жизни // Интеграция науки и практики в современных условиях. Материалы Международной (заочной) научно-практической конференции. Научное (непериодическое) электронное издание / Под общей редакцией А.И. Вострецова . 2016.
2. Ефимов, Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. - М.: Наука, 1970.
3. Розенфельд, Б.А. Многомерные пространства. / Б.А. Розенфельд – М.: Наука, 1966. – 667 с.

4. Парнасский, И.В. Многомерные пространства. Квадратичные формы и квадрики. / И.В. Парнасский, О.Е. Парнасская. – М.: Просвещение, 1978. – 128 с.