УДК 512

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОРМ МНОГОГРАННИКОВ. ИЗГИБАЕМЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Кирилюк И. А., студентка группы ХОб-171, 1 курс,
Осипов А. В., студент группы ТЭб-172, 1 курс,
Якутин С. К., студент группы ТЭб-172, 1 курс,
Научный руководитель: Богданова Т. В., старший преподаватель
Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева
г. Кемерово

Исторически геометрия является первичной интеллектуальной деятельностью человечества в целом и каждого человека в отдельности. Самые первые упоминания о многогранниках появились очень давно, а именно за 3 тыс. лет до н. э. Можно припомнить много знаменитых пирамид, существовавших в то время. Одна из них – пирамида Хеопса. Это правильная пирамида (с одинаковыми гранями и углами), и в ее основании лежит квадрат. Не зря люди говорят, что эта пирамида – безмолвный трактат в геометрии. Но, есть полуправильные многогранники – у них все стороны – правильные многоугольники и все углы равны. Их открыл Архимед. Он детально обрисовал 13 таких полиэдров, позднее их назвали в честь создателя – телами Архимеда. Ну а изгибаемые многогранники открыли намного позже.

С позиции геометрии многогранник является частью пространства, которая ограниченна плоскими многоугольниками – гранями. Стороны и вершины граней называют ребрами и вершинами. Грани образуют так называемую многогранную поверхность [1].

Многогранник (вернее — многогранная поверхность) изгибаемый, в случае если его композицию в пространстве возможно поменять нескончаемой деформацией, при которой абсолютно любая грань многогранника не меняет собственных размеров. Деформация исполняется лишь за счёт нескончаемых преобразований двугранных углов. Эта деформация имеет название непрерывное изгибание многогранника.

Изгибаемый многогранник — это полиэдр, трёхмерную конфигурацию которого можно изменить деформацией, при этом все стороны не видоизменяются, а искажение происходит из-за постоянного изменения двугранных углов.

Полиэдрические формы мы наблюдаем повсюду: коробка, учебник, кирпич – прямоугольные параллелепипеды; упаковка молока – тетраэдры; граненый стакан даёт представление о призмах.

Допустим, есть многоугольник, в вершинах которого находятся шарниры. Если он имеет 4 и более вершин, то многогранник может изгибаться. Но, стоит вопрос: может ли изгибаться многогранник в геометрической модели нашего мира? Получится ли у них изгибаться, если форму граней оставить неизменной?

На самом деле иногда могут, но это очень редкое свойство, скорее исключение из правил, чем правило. Естественно, нужно знать, что изгибание многогранника – это непрерывное изгибание, а не неоднозначное обозначение граней полиэдра [2].

Самый первый достаточно важный вклад в истории изгибаемых многогранников внес Огюстен Коши. Он выдвинул теорему с доказательством в 1813 году. Звучит она так: всякий выпуклый многогранник не изгибаем. В течение 2-х столетий ученые думали, будто всякий выпуклый и всякий невыпуклый полиэдр также не изгибаем.

Весьма обоснованные сомнения в этой теории появились в 1897 году. Французский ученый Рене Брикар смог аргументировать, что изгибаемые многогранники существуют, построив их математические примеры. Эти многогранники были самопересекающимися, а не только невыпуклыми— их грани пересекались. Многогранник Брикара реализовать в нашем трёхмерном пространстве невозможно.

В 1974 г. американский математик Г. Глак установил, что в какой-то степени практически все полиэдры не изгибаемы, и, следовательно, поиск изгибаемого полиэдра без самопересечений считался почти безнадежным. Однако в 1977 г. У американского учёного Р.Коннелли получилось создать такой полиэдр— очень сложную конструкцию с 18 вершинами. Для таких полиэдров Коннелли придумал название – флексор.

Спустя некоторое время после Коннелли немецкий учёный Клаус Штеффен предоставил еще один полиэдр, всего с 9 вершинами, который по сей день является простейшим примером вложенного изгибаемого полиэдра. Подчеркнём, что примеру Штеффена уже более 30 лет, но проблема существования изгибаемого полиэдра без самопересечений с меньшим, числом вершин до сих пор остается нерешённой [3].

Практически в то же время после построения изгибаемых полиэдров открылось, что все они имеют поразительную черту: в процессе изгибания их объем сохраняется. Не ясно, кем было замечено это свойство впервые. В августе 1978 г. на Международном математическом конгрессе в Хельсинки Коннелли предположил, что данное свойство является общим для всех изгибаемых полиэдров. Нельзя было точно утверждать в справедливости этой гипотезы. По всей видимости, большинство придерживалось мысли, что она ошибочна, и искали доказательства.

Можно показать, что не самопересекающийся полиэдр с 7 и меньшим числом вершин изгибаться не может. Описанный изгибаемый многогранник Штеффена имеет 9 вершин. А вот бывает ли изгибаемый не самопересекающийся полиэдр с 8 вершинами до сих пор неизвестно.

Когда математики поняли, что изгибаемые полиэдры бывают, возник вопрос, получивший название «гипотезы кузнечных мехов». За счёт чего кузнечные мехи раздувают угли? За счёт чего играет гармонь? Их принцип действия основан на изменении внутреннего объёма. А что же изгибаемые многогранники — будет ли меняться их объём при изгибании? Можно ли кузнечные мехи или гармонь делать не из кожи, а из жёстких пластин, в виде полиэдров?

В конце XX века полный ответ на этот вопрос был найден российским математиком И. Х. Сабитовым. Оказывается, для объёмов многогранников, в том числе изгибаемых, верен некий аналог формулы Герона для площади треугольника. А именно, существует такой многочлен одной переменной, что его коэффициенты зависят только от длин рёбер многогранника, а объём есть корень этого многочлена. Так как рёбра у изгибаемых многогранников не меняются, то и сам этот многочлен, а значит, и его корни не меняются при изгибании самого многогранника. Но различные корни многочлена одной переменной суть конкретные числа, расположенные друг от друга на каком-то расстоянии. При небольших шевелениях полиэдра объём может практически не изменяться, поэтому не имеет возможности быстро перескочить из одного корня полинома в другой. Следовательно, объём изгибаемых полиэдров остаётся постоянным при их изгибаниях! Допустим, если все грани многогранника — треугольники, то расстояния его ребер определённо показывают форму треугольных граней. Ввиду этого, если многогранник выпуклый, то длины ребер абсолютно точно определяют форму полиэдра, поскольку по теореме Коши за многогранник берётся множество N плоских многоугольников - граней, находящихся в пространстве так, что все стороны любого из них являются стороной в точности ещё одного многоугольника. Но если у полиэдра определённо задана форма, то и его объем определен также однозначно.

Изгибанием полиэдра считается его непрерывное деформирование, при котором преобразовывается по крайней мере один из двугранных углов при ребрах, однако грани сохраняются. Другими словами, в данной теории грани многогранника считаются как абсолютно твердые пластинки, которые могут совершать обороты вокруг ребер и вершин [4].

В сферическом пространстве любой размерности существует изгибаемый полиэдр, объём которого непостоянен в процессе изгибания. Пример такого самопересекающегося многогранника в размерности 3 был построен в 1997 году Александровым, а пример не самопересекающегося полиэдра в сферическом пространстве любой размерности — А. А. Гайфуллиным в его работе 2015 года.

Что же происходит не в трехмерном пространстве, а в больших размерностях?

Математик Александр Гайфуллин объединил достижения на многомерные пространства. Он описал все мерные изгибаемые многогранники ровно с вершинами, доказал наличие изгибаемых многогранников (в т. ч. самопересекающихся) в пространствах всех размерностей. И сделал все это в каждом многомерном пространстве постоянной кривизны: евклидовом — пространстве нулевой кривизны, являющимся обобщением нашего обычного пространства; пространстве Лобачевского — пространстве постоянной отрицательной кривизны; сферическом — пространстве постоянной положительной кривизны.

В пространствах постоянной положительной кривизны (сферических) объём изгибаемых многогранников уже не обязательно постоянен (даже в размерности 3). А в пространствах постоянной отрицательной кривизны (Лобачевского) неизменность объёма получилось доказать только в размерностях 3, 5, 7, … (нечётных). В чётных же размерностях примеров изгибаемых многогранников с изменяющимся объёмом неизвестно, но и доказать его постоянство тоже пока не удалось.

Да и в евклидовых пространствах остаются нерешённые задачи. К примеру, в размерностях, начиная с 4, все известные изгибаемые многогранники — самопересекающиеся. Есть ли не самопересекающиеся – непонятно до сих пор [5].

Открытые вопросы

- Есть ли изгибаемые многогранники без самопересечения в размерностях больше 3.
- Есть ли такой не самопересекающийся изгибаемый многогранник, у которого меньше 9 вершин.
- Должен ли объем быть неизменным в пространствах постоянной отрицательной кривизны (пространствах Лобачевского) четной размерности при изгибании многогранника.
- Правда ли, что если из одного не самопересекающегося многогранника, получить другой не самопересекающийся многогранник изгибанием, то эти фигуры равносоставлены (если второй разделить на множество тетраэдров, каждый из них переместить так, что бы они были независимы друг от друга в пространстве, то возможно получить части разбиения первого многогранника).

Заключение

Без знания теорем и законов, относящихся к многогранникам, не вышло бы последующее изучение и прогресс в геометрии и иных науках. Нельзя переоценить роль «изгибаемых многогранников» не только в науках, но и в обыденной жизни. Данная тема еще до конца не изучена, по ней известны и неоспоримые теоремы, и нерешенные вопросы.

Список литературы:

1. Изгибаемый многогранник -2017 [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Изгибаемый_многогранник (дата обращения 12.03.2018)
2. Изгибаемые многогранники – 2014 [Электронный ресурс]. URL: https://habrahabr.ru/post/234315/ (дата обращения 12.03.2018)
3. Венинниджер М. Модели многогранников. М.: Мир, 1974. – С.24-42.
4. Н.П. Долбилин. Жемчужины теории многогранников. М.: МЦНМО, Москва, 2000. – С. 4-19.
5. Залгаллер В.А. Непрерывно изгибаемый многогранник //Квант. 1978. № 9. С. 14-18.