УДК 519.63

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В УГОЛЬНОМ ПЛАСТЕ

Кудайбергенов М.К., докторант
Казахский гуманитарно-юридический инновационный университет,
г. Семей, Казахстан

В работе рассмотрена плоская задача о деформировании горизонтального угольного пласта конечной длины находящимся под действием вышележащих пород и лежащим между двумя штреками. Построено аналитическое решение в виде ряда и получены аналитические выражения для вычисления напряжений.

Вследствие большой протяженности пласта по сравнению с его мощностью и расстоянием между штреками считаем, что применима модель плоского деформированного состояния [5]. В этом случае уравнения равновесия Навье записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

Напряженное состояние в пласте описывается уравнением неразрывности деформации Сен-Венана и законом Гука

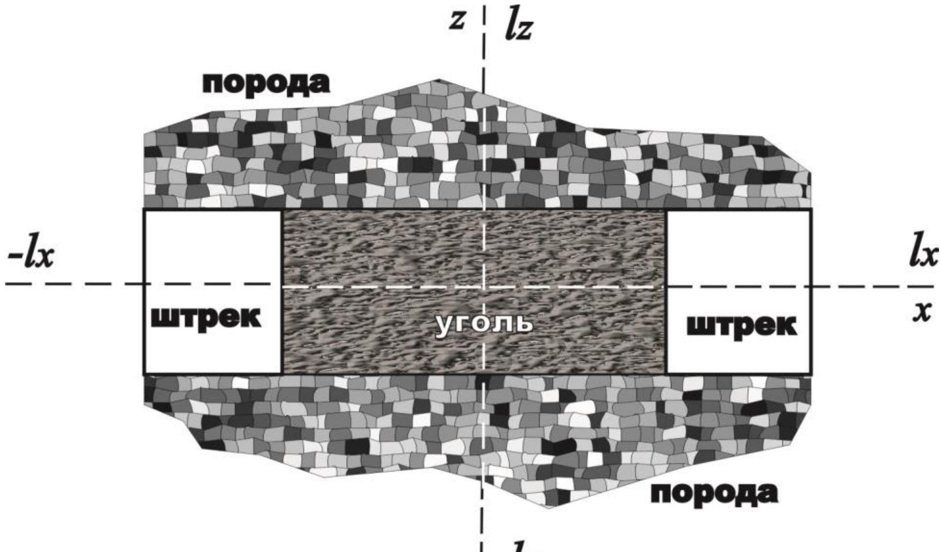

Рисунок 1: Модель угольного пласта и система координат, принятая в работе.

Считаем, что рассматриваемая система является уравновешенной (угольный пласт, находящийся под действием на него сил, неподвижен). В этом случае момент сил и сумма сил, действующие на пласт, должны быть равны нулю. Т.е., должны удовлетворяться следующие равенства:

$$\int_{-l_x}^{l} [x\sigma_z(x, l_z) - l_z\tau_{xz}(x, l_z)]dx + \int_{l_x}^{-l_x} [x\sigma_z(x, l_z) - l_z\tau_{xz}(x, l_z)]dx = 0$$

$$\int_{-l_x}^{l_x} \sigma_z(x, l_z)dx = \int_{-l_x}^{l_x} \sigma_z(x, -l_z)dx, \ \int_{-l_x}^{l_x} \tau_{xz}(x, l_z)\, dx = \int_{-l_x}^{l_x} \tau_{xz}(x, -l_z)\, dx \tag{2}$$

или, принимая во внимание (4),

$$\frac{1}{2}\left(\int_{-l_x}^{l_x} xf_1(x)dx - \int_{-l_x}^{l_x} xf_2(x)dx\right) = l_z \int_{-l}^{l_x} g_1(x)dx,$$

$$\int_{-l_x}^{l_x} f_1(x)dx = \int_{-l_x}^{l_x} f_2(x)dx, \ \int_{-l_x}^{l_x} g_1(x)dx = \int_{-l_x}^{l_x} g_2(x)dx \tag{3}$$

Следуя хорошо известному подходу для вычисления напряжений (см., например, [5]), введём функцию Эри. Вводим функцию Эри φ так, чтобы уравнения (1) удовлетворялись бы автоматически:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} \tag{4}$$

тогда для функции φ будет иметь место бигармоническое уравнение:

$$\Delta^2\varphi = 0. \tag{5}$$

Для решения уравнения (10) и (9) следуют граничные условия:

$$\varphi_{xx}|_{z=\pm l_z} = \begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) \end{cases}, \qquad \varphi_{xz}|_{z=\pm l_z} = \begin{cases} g_1(x) \\ g_2(x) \end{cases},$$

$$\varphi_{zz}|_{x=\pm l_x} = 0, \qquad \varphi_{xz}|_{x=\pm l_x} = 0. \tag{6}$$

Таким образом, для того чтобы найти напряжения σ_x, σ_z и τ_{xz} в области $[-l_x, l_x] \times [-l_z, l_z]$ необходимо найти решение задачи $\Delta^2\varphi = 0$ и $\varphi_{xx}|_{z=\pm l_z} = \begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) \end{cases}$, $\varphi_{xz}|_{z=\pm l_z} = \begin{cases} g_1(x) \\ g_2(x) \end{cases}$.

Чтобы применить математическую технику (как при использовании решений Файлона или Рибьера) для решения задачи (5)-(6), необходимо чтобы для базисных функций $H_m(x)$ на интервале $[-l_x, l_x]$ имели место условия на концах: $H_m(\pm l_x) = 0$, $H_m^{'}(\pm l_x) = 0$. Функции $\sin(\pi x/l_x)$ или $\cos(\pi x/l_x)$ таким условиям не удовлетворяют.

Проведем выборку базисных функций. С.А. Халилов предложил для решения бигармонического уравнения использовать базисные функции

$H_m(x)$ [1], [2] следующего вида:

$$H_m(x) = P_{m+4}^4(x), \qquad m = 0,1,2 \ldots$$

где $P_{m+4}^4(x)$ - нормированные присоединенные полиномы Лежандра. Система функций $\{H_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ является полной и ортонормированной на отрезке $[-1,1]$.

Непрерывная функция $s(x)$ с краевыми значениями $s(\pm 1) = 0$, $s'(\pm 1) = 0$ может быть разложена в ряд Фурье по системе функций $\{H_m(x)\}_{n=0}^{\infty}$, ряд будет сходиться абсолютно и равномерно.

С.А. Халиловым и его соавторами было доказано и показано на численных примерах [1], [3], [4], что функции $H_m'(x)$ и $H_m''(x)$ являются квазиортогональными в смысле выполнения условий:

$$\frac{\langle H_n^{(k)}(x), H_m^{(k)}(x)\rangle}{\left\|H_n^{(k)}(x)\right\|\left\|H_m^{(k)}(x)\right\|} = \theta, \qquad |\theta| \approx 0, \qquad m \neq n,\ k = 1,2.$$

Данное замечательное свойство этих функций позволило применить процедуру Бубнова-Галеркина к поиску решения бигармонического уравнения и значительно её упростить.

Далее ищем решение бигармонического уравнения в виде суммы $\varphi(x,z) = \varphi_1(x,z) + \varphi_2(x,z)$

Методом неопределенных коэффициентов нетрудно получить $\varphi_1(x,z)$ в виде полинома:

$$\varphi_1(x,z) = \frac{H}{6}x^3 + \frac{F}{2}x^2 - \frac{G}{3l_x^2}x^3 z + Gxz$$

Очевидно, функция $\varphi_1(x,z)$ найдена с точностью до линейных функций от x и z, поскольку вышеприведённые краевые условия не обеспечивают единственности решения бигармонического уравнения.

Функция $\varphi_2(x,z)$ является решением бигармонического уравнения (5) и удовлетворяет краевым условиям

$$\left.\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}\right|_{z=\pm l_z} = \sum_{m=0}^{\infty}\begin{Bmatrix} f_m^1 \\ f_m^2 \end{Bmatrix} X_m''(x;l_x), \quad \left.\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial z}\right|_{z=\pm l_z} =$$
$$-\sum_{m=0}^{\infty}\begin{Bmatrix} g_m^1 \\ g_m^2 \end{Bmatrix} X_m'(x;l_x),$$
$$\left.\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}\right|_{x=\pm l_x} = 0, \ \left.\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial z}\right|_{x=\pm l_x} = 0.$$

Данные краевые условия в силу свойств функций $X_m(x;l_x)$ $(\forall m)$ автоматически удовлетворяют соотношениям (3).

Приближённое аналитическое решение $\varphi_2(x,z)$ будем искать в виде суммы [3] $\varphi(x,z) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m(z) X_m(x;l_x)$.

Процедура Бубнова-Галёркина, применённая к решению однородного бигармонического уравнения (5), приведёт к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{m=0}^{\infty}[R_m\langle X_m'', X_s''\rangle - 2R_m''\langle X_m', X_s'\rangle + R_m''''\delta_{ms}] = 0, \quad s = 0, 1, 2\dots \quad (7)$$

здесь δ_{ms} - символ Кронекера.

Воспользуемся свойством квазиортогональности первых и вторых производных функций $X_m(x; l_x)$, из (7) получим задачи

$$R_m'''' - 2c_m^2 R_m'' + d_m^4 R_m, \; R_m(\pm l_x) = \begin{cases} f_m^1 \\ f_m^2 \end{cases}, \; R_m'(\pm l_x) = \begin{cases} g_m^1 \\ g_m^2 \end{cases}, \quad m = 0, 1, 2, \quad (8)$$

где $c_m^2 = \left\| X_m'(\cdot\,;\, l_x) \right\|^2$, $d_m^4 = \left\| X_m''(\cdot\,;\, l_x) \right\|^2$.

Поскольку $d_m > c_m$ для всех m [17], четыре корня характеристического уравнения могут быть найдены в виде: $\pm d_m e^{\pm i\vartheta_m}$, *где* $2\vartheta_m = arctg\sqrt{d_m^4/c_m^4 - 1}$. Следовательно, решения задач (8) имеют вид

$$R_m(z) = \hat{L}_m \sin(\vartheta_m z)\mathrm{sh}(d_m z) + \hat{K}_m \cos(\vartheta_m z)\mathrm{ch}(d_m z)$$
$$+\tilde{L}_m \sin(\vartheta_m z)\mathrm{ch}(d_m z) + \tilde{K}_m \cos(\vartheta_m z)\mathrm{sh}(d_m z),$$

$$\hat{L}_m = \frac{v_m \sin(v_m l_z)\mathrm{sh}(d_m l_z) - d_m \cos(v_m l_z)\mathrm{sh}(d_m l_z)}{\Delta_1}(f_m^1 + f_m^2)$$
$$- \frac{\cos(v_m l_z)\mathrm{ch}(d_m l_z)}{\Delta_1}(g_m^1 - g_m^2),$$

$$\hat{K}_m = \frac{v_m \cos(v_m l_z)\mathrm{sh}(d_m l_z) - d_m \sin(v_m l_z)\mathrm{ch}(d_m l_z)}{\Delta_1}(f_m^1 + f_m^2)$$
$$+ \frac{\sin(v_m l_z)\mathrm{ch}(d_m l_z)}{\Delta_1}(g_m^1 - g_m^2),$$

$$\tilde{L}_m = \frac{v_m \sin(v_m l_z)\mathrm{sh}(d_m l_z) - d_m \cos(v_m l_z)\mathrm{ch}(d_m l_z)}{\Delta_2}(f_m^1 - f_m^2)$$
$$- \frac{\cos(v_m l_z)\mathrm{sh}(d_m l_z)}{\Delta_2}(g_m^1 + g_m^2),$$

$$\tilde{K}_m = \frac{v_m \cos(v_m l_z)\mathrm{ch}(d_m l_z) - d_m \sin(v_m l_z)\mathrm{sh}(d_m l_z)}{\Delta_2}(f_m^1 - f_m^2)$$
$$+ \frac{\sin(v_m l_z)\mathrm{ch}(d_m l_z)}{\Delta_2}(g_m^1 + g_m^2),$$

$$\Delta_1 = v_m \,\mathrm{sh}(2d_m l_z) + d_m \sin(2v_m l_z), \quad \Delta_2 = v_m \,\mathrm{sh}(2d_m l_z) - d_m \sin(2v_m l_z),$$

Суммируя вышеприведённые выражения, приходим к выражению

$$\varphi(x,z) = \frac{H}{6}x^3 + \frac{F}{2}x^2 - \frac{G}{3l_x^2}x^3 z + Gxz + \sum_{m=0}^{\infty} R_m(z) X_m(x; l_x),$$

где все необходимые величины получены выше. Из определения (4) для напряжений получим следующие равенства:

$$\sigma_x(x,z) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m''(z) X_m(x; l_x)$$

$$\sigma_z(x,z) = Hx + F - 2\frac{G}{l_x^2}xz + \sum_{m=0}^{\infty} R_m(z) X_m''(x; l_x),$$

$$\tau_{xz}(x,z) = -G\left(1 - \frac{x^2}{l_x^2}\right) - \sum_{m=0}^{\infty} R_m'(z) X_m'(x; l_x),$$

В результате построены аналитические выражения для приближенного вычисления напряжений в угольном пласте конечной длины, находящимся под действием вышележащих пород и лежащим между двумя штреками. Для приемлемой точности необходимо 20-40 членов ряда при разложении функций f_j и g_j, поэтому распределение напряжений, используемое для интерпретации данных геомеханического мониторинга при комбайновой выемке запасов, может определяться в режиме реального времени.

Список литературы

1. Халилов С.А., Об одной системе координатных функций для решения краевых задач теории пластин и оболочек. Прочность конструкций летательных аппаратов: темат. сб. науч. тр., вып. 4. Харьков: ХАИ, 1977, с. 60-65.
2. Халилов С.А., Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения. Прочность конструкций летательных аппаратов: темат. сб. науч. тр., вып. 5. Харьков: ХАИ, 1978, с. 46-56.
3. Халилов С.А., Минтюк В.Б., Ткаченко Д.А., Приближенное аналитическое решение бигармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях на двух противоположных сторонах и произвольных – на других. Авиационно-комическая техника и технология, 2013, №5, с. 40-49.
4. Халилов С.А., Минтюк В.Б., Ткаченко Д.А., Построение и исследование аналитико-численного решения задачи об изгибе жёстко защемлённой прямоугольной пластины. Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии, 2011, №49, с. 81-94.
5. Новацкий В., Теория упругости. М: Мир, 1975, 872 с.