

УДК 514.1

ГИПОТЕЗА ТЫСЯЧИЛЕТИЯ (ГИПОТЕЗА ПУАНКАРЕ)

Р.В. Гаджиев, студент группы ЭЭб-154, I курс
Научный руководитель: А.В. Чередниченко, ассистент
Кузбасский государственный технический университет
г. Кемерово

Гипотеза Пуанкаре является одной из самых значимых для человечества. Известный французский математик Анри Пуанкаре в 1904 году предположил, что всякое односвязное компактное трёхмерное многообразие без края гомеоморфно трёхмерной сфере [1]. Эта гипотеза очень трудна для понимания человеку, который далёк от топологии: наука, изучающая свойства пространства, которые при непрерывном деформировании (изменении), т.е. без разрыва и склеивания, остаются неизменными. Постараемся объяснить эту гипотезу на более понятном нам языке. Чтобы понять смысл этой гипотезы, нужно разобрать её детально.

Односвязное пространство – линейно-связное топологическое пространство, в котором любой замкнутый путь можно непрерывно стянуть в точку [2] (Рис. 1).

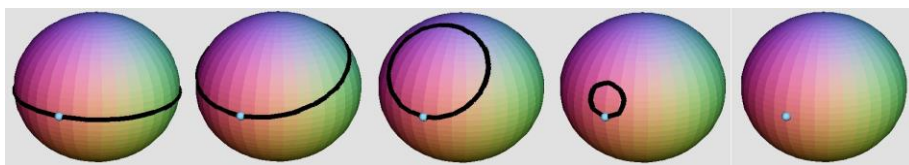


Рис.1. Односвязное пространство.

Компактное пространство – определённый тип топологических пространств, обобщающий свойства ограниченности и замкнутости в евклидовых пространствах на произвольные топологические пространства [3]. Трёхмерное многообразие без края – это геометрическая фигура, у которой каждая точка имеет окрестность в виде трёхмерного шара. Термин «гомеоморфно» означает непрерывное деформирование одного топологического пространства в другое. Для более ясной формулировки гипотезы, приведём пример гомеоморфизма кружки и тора, наиболее понятных нашему пониманию фигур (Рис.2).



Рис.2. Гомеоморфизм кружки и тора.

Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева
19-22 апреля 2016 г., Россия, г. Кемерово

Трёхмерная сфера (сфера Пуанкаре) – это трёхмерное многообразие, все гомологические группы которого совпадают с гомологическими группами трёхмерной сферы. Непонятный термин «гомологическая группа» – это группа, которая ставится в соответствие топологическому пространству с целью алгебраического исследования его топологических свойств. Трёхмерную сферу представить достаточно сложно, можно только указать алгоритм её построения. Сфера Пуанкаре может быть получена из додекаэдра, у которого будут склеены каждые грани с противоположной, повернутой на угол $\pi/5$ по часовой стрелке (Рис.3).

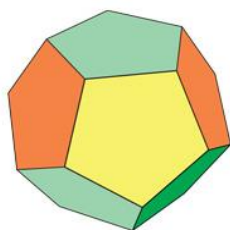


Рис.3. Модель додекаэдра

Зная все термины гипотезы Пуанкаре, соединим их в одну упрощённую формулировку: «любое трёхмерное деформируемое многообразие, не имеющее внутренних дырок, можно превратить в трёхмерную сферу».

Гипотеза Пуанкаре была доказана российским математиком Григорием Перельманом в 2002 – 2003 годах в первоначальной формулировке Пуанкаре. Для доказательства этой гипотезы он использовал необычный для математиков способ, с помощью потока Риччи в $n=3$ мерном пространстве. Поток Риччи был до конца исследован американским математиком Ричардом Гамильтоном в начале 1980-х годов. Поток Риччи – это определённое уравнение в частных производных, описывающая деформацию римановой метрики на многообразии, похожее на уравнение теплопроводности [4]. Риманова метрика – это симметричное тензорное поле ранга (0,2) на гладком многообразии, посредством которого задаются скалярное произведение векторов в касательном пространстве, длины кривых, углы между кривыми и т.д. [5].

$\partial_t g_t = -2Rc_t$ – уравнение потока Риччи, где:

\mathcal{G}_t – однопараметрическое семейство римановых метрик на полном многообразии (зависящая от вещественного параметра t);

Rc_t – тензор Риччи (степени отличия геометрии многообразия от геометрии плоского евклидова пространства).

Использование потока Риччи для непрерывного деформирования трёхмерного многообразия приводит к некоей проблеме. К примеру, у гантели при непрерывном деформировании, сплошная трубка, которая находится посере-

дине, пережимается до точечного сечения и деформировать в сферу невозможно (Рис.4).

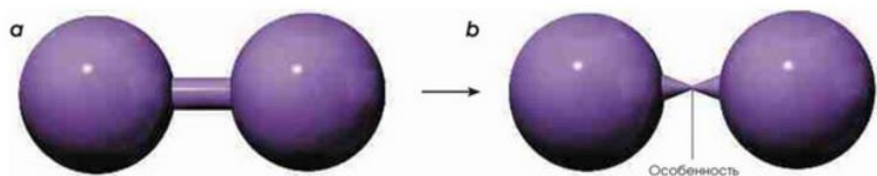


Рис.4. Попытка деформирования гантели в трёхмерном пространстве.

Отформатировано: По центру, Отступ: Первая строка: 0 см, интервал после: Авто

Отформатировано: Шрифт: Times New Roman, 13 пт, курсив, Цвет шрифта: Черный

Перельман начал проводить «хирургические» операции над многообразиями и эти проблемы были решены. Он вырезал небольшие участки с каждой стороны точки сужения, а срезанные места закрывал небольшими сферами, и затем дальше продолжался использовать потока Риччи (Рис.5).

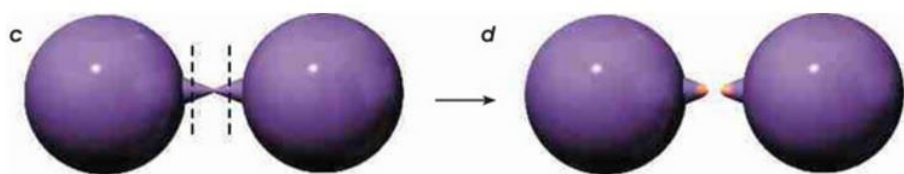


Рис. 5. "Хирургическая" операция Перельмана над трёхмерной фигурой

А если снова начинает возникать та же проблема, то эта процедура повторяется снова. Григорий добавил к потоку Риччи новую переменную. Эта новая переменная не устраняет эту проблему, но позволяет производить более глубокий анализ $n=3$ многообразия.

Получение доказательств гипотезы Пуанкаре разделялось на три этапа:

- 1) В 1960 – 1970-х годах для $n \geq 5$ мерного многообразия получены американским математиком Стивеном Смейлом;
- 2) В 1982 году для более серьёзного случая $n=4$ мерного многообразия получены американским математиком Майклом Фридманом;
- 3) В 2003 году для самого запутанного случая $n=3$ мерного многообразия получены российским учёным Григорием Перельманом.

Гипотеза Пуанкаре не зря была признана математическим институтом Клэя (Массачусетс, США), как гипотеза тысячелетия и была присуждена Григорию Перельману премия тысячелетия математического института Клэя, составляющая 1000000 долларов, но Григорий отказался от неё. Для математики значение этой теоремы огромно, в особенности способ её доказательства. Что касается астрономии, то теорема Перельмана – Пуанкаре даёт предположение о том, что если наша Вселенная имеет свойства односвязного компактного многообразия без края, то соответственно она и есть – трёхмерная сфера, хотя ранее считалось, что

Вселенная имеет форму евклидоваго трёхмерного пространства, т.е. бесконечности.

Список литературы:

1. Свободная энциклопедия Википедия, статья «Гипотеза Пуанкаре» [электронный ресурс]. - https://ru.wikipedia.org/wiki/Гипотеза_Пуанкаре.
2. Свободная энциклопедия Википедия, статья «Односвязное пространство» [электронный ресурс]. - https://ru.wikipedia.org/wiki/Односвязное_пространство.
3. Свободная энциклопедия Википедия, статья «Компактное пространство» [электронный ресурс]. - https://ru.wikipedia.org/wiki/Компактное_пространство.
4. Свободная энциклопедия Википедия, статья «Поток Риччи» [электронный ресурс]. - https://ru.wikipedia.org/wiki/Поток_Риччи.
5. Свободная энциклопедия Википедия, статья «Риманова метрика» [электронный ресурс]. – https://ru.wikipedia.org/wiki/Метрический_тензор.