УДК 622.61: 516.02

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧИ О ДВУМЕРНОМ ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В СВЕРХЗВУКОВОЙ ЧАСТИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СОПЛА

Китаев А. В., студент гр. ТЭб – 121, IV курс
Научный руководитель: Черданцев С. В., д.т.н., профессор
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева,
г. Кемерово

Энергетические сопла, представляющие собой сопла Лаваля широко применяются в конструкциях паровых турбин, ракетных и авиационных двигателей, аэродинамических труб и других газодинамических приборов и аппаратов для преобразования дозвукового течения газа в сверхзвуковое.

К настоящему времени расчет энергетических сопел чаще выполняется в рамках модели одномерного течения газа, в которой рассматривается только осредненные скорости в каждом поперечном сечении сопла, а в качестве основного уравнения используется уравнение неразрывности совместно с уравнением адиабаты Пуассона.

Анализ одномерного течения показывает [1, 2, 3], что скорость газа на выходе из сопла не зависит ни от очертания стенок сопла, ни от его длины. Однако именно эти параметры определяют отклонения действительного течения в сопле от идеальной схемы «струйки» с равномерным распределением скоростей в каждом поперечном сечении. Следовательно, в рамках модели одномерного течения газа вопрос о получении на выходе из сопла заданного поля скоростей остается открытым, в чем состоит существенный недостаток одномерной модели.

Модель двумерного течения газа более наглядно и объективно описывает реальную картину течения газа в соплах. Во-первых, она отражает изменение не только модуля скорости, но и ее направления. Во-вторых, учитывает продольный контур сопла и форму его поперечного сечения. В-третьих, показывает, что линия, отделяющая дозвуковую область от сверхзвуковой может быть не только прямолинейной, как в одномерной модели, но также и криволинейной линией.

В силу сказанного, процедуру построения решения задачи о течении газа в соплах Лаваля выполним на базе двумерной модели, полагая, что газ баротропный, а его течение стационарное и изоэнтропическое. В силу этого искомыми величинами являются компоненты v_x, v_y вектора скорости, модуль которого v, плотность ρ и давление p, которые, ввиду баротропности газа связаны уравнением

$$\rho = \rho(p). \tag{1}$$

Искомые величины в двумерном течении газа являются функциями декартовых координат x, y, первая из которых направлена вдоль оси сопла, а вторая перпендикулярна ей. При этом двумерное течение газа может быть плоскопараллельным – если поперечное сечение сопла прямоугольное или осесимметричным – если сечение круговое.

Исходными дифференциальными уравнения для отыскания основных величин являются уравнения Эйлера, которые, в силу первых двух допущений, представляются в виде [2, 3]

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2}$$

и уравнение неразрывности

$$v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\delta v_y}{y}\right) = 0, \tag{3}$$

где параметр δ для плоскопараллельных течений принимается $\delta = 0$, а для осесимметричных $\delta = 1$.

Уравнения (1), (2), (3), образуют систему относительно искомых функций ρ, p, v_x, v_y, которая вполне определена. Учитывая, что ввиду изоэнтропичности процесса, течение газа является безвихревым ($\Omega_z = 0$) и, значит, потенциальным, то имеют место формулы [2 – 3]

$$\Omega_z = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0, \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{4}$$

где Ω_z – вихрь скорости, φ – ее потенциал. Принимая во внимание, что местная скорость звука a в газе может быть определена по формуле $a^2 = \partial p/\partial \rho$ систему уравнений (1) – (3) приведем к дифференциальному уравнению 2-го порядка в частных производных

$$A\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \delta\frac{a^2 v_y}{y} = 0. \tag{5}$$

Используя свойства квадратичных форм и учитывая классификацию и свойства дифференциальных уравнений 2-го порядка [4], приведем уравнение (5) к системе двух дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\cos(\theta \pm \alpha) dv_x + \sin(\theta \pm \alpha) dv_y - \delta\frac{v_y \cdot \sin^2\alpha}{y} dl = 0, \tag{6}$$

где знак плюс соответствует первому уравнению, а минус – второму уравнению, $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ – дифференциал дуги профиля сопла.

Если уравнение (5) должно выполняться в каждой точке внутри сопла, то система уравнений (6) справедлива в каждой точке на характеристических линиях (далее характеристики) $y_1(x)$ и $y_2(x)$, положение которых определяются следующим образом [2]

$$\frac{dy_1}{dx} = \mathrm{tg}(\theta - \alpha), \quad \frac{dy_2}{dx} = \mathrm{tg}(\theta + \alpha), \tag{7}$$

а углы α и θ находятся по формулам

$$\sin\alpha = \frac{a}{v}, \;\; v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \;\; \cos\theta = \frac{v_x}{v}, \;\; \sin\theta = \frac{v_y}{v}. \qquad (8)$$

Из формул (7), (8) следует, что характеристики $y_1(x)$, $y_2(x)$ на плоскости x, y располагаются под углом 2α друг к другу, а вектор скорости делит этот угол пополам. Неизвестный угол α находится по формуле

$$a = \sqrt{a_0^2 - \frac{k-1}{2}v^2}, \qquad (9)$$

вытекающей из уравнения Бернулли для идеального газа. В формуле (9) обозначены: k – показатель адиабаты, a_0 – скорость звука в покоящемся газе, определяемая по формуле [1 – 3]

$$a_0 = \sqrt{kRT_0}, \qquad (10)$$

где T_0 – абсолютная температура газа, R – универсальная газовая постоянная.

Поскольку в процессе решения системы (6), (7) появляются неизвестные постоянные интегрирования, то необходимо задать дополнительные условия, в качестве которых следует принять параметры газа на некоторой начальной линии, в каждой точке которой они известны. Иначе говоря, для описания течения газа в сверхзвуковой части сопла следует сформулировать задачу Коши следующим образом: для системы уравнений (6), (7) и известных параметров газа в каждой точке начальной линии найти неизвестные параметры газа на характеристических линиях.

В общем случае найти решения задачи Коши не представляется возможным. Поэтому ее решение мы построим приближенно, для чего воспользуемся методом, основанным на составлении разностной схемы с последующей ее численной реализацией.

Процедуру приближенного построения решения задачи Коши начнем с выбора начальной линии, в качестве которой мы не можем принять звуковую линию AB, расположенную в горловине сопла (рис. 1), поскольку здесь $v = a$, угол Маха $\alpha = 90^0$ и поэтому все характеристические линии, выходящие из точек, принадлежащих AB, совпадают с самой линией AB.

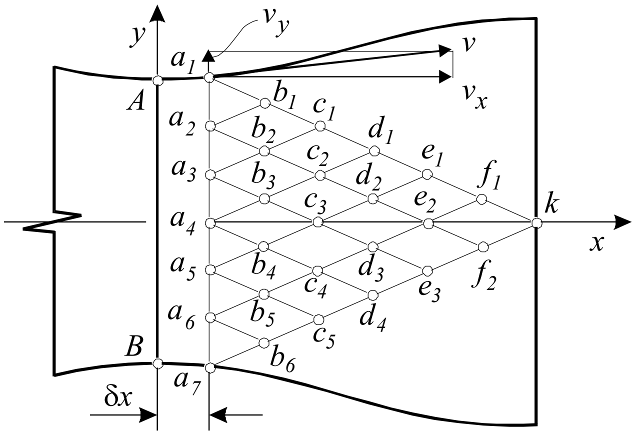

Рис. 1. Схема приближенного построения Задачи Коши

В силу этого, за начальную линию мы примем линию a_1a_7, которую расположим параллельно звуковой линии AB на расстоянии δx от нее в сверхзвуковой области (рис. 1). Будем полагать, что скорость газа во всех точках $a_1,\ldots,a_7$ одинакова и превышает скорость звука. Очевидно, что в точке a_1 имеет место формула $\mathrm{tg}\theta = y'$, где y – функции, описывающая профиль сопла. Далее бесконечно малые величин dy, dx, dl, dv_x, dv_y в уравнении (6) заменим их малыми, но конечными значениями: Δy Δx, Δl, Δv_x, Δv_y.

Затем через каждую из точек $a_1,\ldots,a_7$ проведем касательные к характеристическим линиям обоих семейств, определяемых по формулам (7). В результате пересечения характеристических линий получаются точки b_i (i = 1, 2,…,6), для вычисления координат которых составляем систему уравнений в конечных разностях, вытекающую из формул (7)

$$\begin{cases} y_{b_i} - y_{a_i} = (x_{b_i} - x_{a_i})\mathrm{tg}(\theta_{a_i} - \alpha_{a_i}), \\ y_{b_i} - y_{a_{i+1}} = (x_{b_i} - x_{a_{i+1}})\mathrm{tg}(\theta_{a_{i+1}} + \alpha_{a_{i+1}}), \end{cases}$$

из которой мы получаем искомые координаты

$$x_{b_i} = \frac{y_{a_{i+1}} - y_{a_i} + x_{a_i}\mathrm{tg}(\theta_{a_i} - \alpha_{a_i}) - x_{a_{i+1}}\mathrm{tg}(\theta_{a_{i+1}} + \alpha_{a_{i+1}})}{\mathrm{tg}(\theta_{a_i} - \alpha_{a_i}) - \mathrm{tg}(\theta_{a_{i+1}} + \alpha_{a_{i+1}})}$$

$$y_{b_i} = y_{a_i} + (x_{b_i} - x_{a_i})\mathrm{tg}(\theta_{a_i} - \alpha_{a_i})$$

и определяем

$$\Delta x_{a_ib_i} = x_{b_i} - x_{a_i}\,,\ \ \Delta y_{a_ib_i} = y_{b_i} - y_{a_i}\,,\ \ \Delta l_{a_ib_i} = \sqrt{\Delta x^2_{a_ib_i} + \Delta y^2_{a_ib_i}}\,.$$

Затем мы записываем уравнения **Ошибка! Источник ссылки не найден.** в конечных разностях для точки b_i (i = 1, 2,…,6)

$$\cos(\theta_{a_i} + \alpha_{a_i})(v_{x(b_i)} - v_{x(a_i)}) + \sin(\theta_{a_i} + \alpha_{a_i}) \times$$
$$\times(v_{y(b_i)} - v_{y(a_i)}) - \frac{v_{y(a_i)} \cdot \sin^2\alpha_{a_i}}{y_{a_i}}\Delta l_{a_ib_i} = 0\,,$$
$$\cos(\theta_{a_{i+1}} - \alpha_{a_{i+1}})(v_{x(b_i)} - v_{x(a_{i+1})}) + \sin(\theta_{a_{i+1}} - \alpha_{a_{i+1}}) \times$$
$$\times(v_{y(b_i)} - v_{y(a_{i+1})}) - \frac{\delta \cdot v_{y(a_{i+1})} \cdot \sin^2\alpha_{a_{i+1}}}{y_{a_{i+1}}}\Delta l_{a_{i+1}b_i} = 0\,,$$

откуда находим составляющие скорости газа в точке b_i

$$v_{x(b_i)} = v_{x(a_i)} - \mathrm{tg}(\theta_{a_i} + \alpha_{a_i})(v_{y(b_i)} - v_{y(a_i)}) + \frac{v_{y(a_i)} \cdot \sin^2\alpha_{a_i}}{y_{a_i}\cos(\theta_{a_i} + \alpha_{a_i})}\Delta l_{a_ib_i} = 0\,,$$

$$v_{y(b_i)} = \frac{v_{y(a_i)} \cdot \mathrm{tg}(\theta_{a_i} + \alpha_{a_i}) - v_{y(a_{i+1})} \cdot \mathrm{tg}(\theta_{a_{i+1}} - \alpha_{a_{i+1}})}{\mathrm{tg}(\theta_{a_i} + \alpha_{a_i}) - \mathrm{tg}(\theta_{a_{i+1}} - \alpha_{a_{i+1}})} +$$

$$+\left(\frac{v_{y(a_i)}\cdot\sin^2\alpha_{a_i}}{y_{a_i}\cos(\theta_{a_i}+\alpha_{a_i})}-\frac{\delta\cdot v_{y(a_{i+1})}\cdot\sin^2\alpha_{a_{i+1}}}{y_{a_{i+1}}\cos(\theta_{a_{i+1}}-\alpha_{a_{i+1}})}\frac{\Delta l_{a_{i+1}b_i}}{\Delta l_{a_ib_i}}\right)\times$$

$$\times\frac{\Delta l_{a_ib_i}}{\operatorname{tg}(\theta_{a_i}+\alpha_{a_i})-\operatorname{tg}(\theta_{a_{i+1}}-\alpha_{a_{i+1}})}.$$

По найденным компонентам находим в точке b_i скорость газа v_{b_i}, угол наклона скорости θ_{b_i}, местную скорость звука a_{b_i} и число Маха M_{b_i}

$$v_{b_i}=\sqrt{v_{x(b_i)}^2+v_{y(b_i)}^2},\quad \theta_{b_i}=\arcsin\left(\frac{v_{y(b_i)}}{v_{b_i}}\right),\quad a_{b_i}=\sqrt{a_0^2-\frac{k-1}{2}v_{b_i}^2},\quad M_{b_i}=\frac{v_{b_i}}{a_{b_i}}.$$

Для сокращения процедуры вычисления учтем, что, ввиду осевой симметрии сопла достаточно найти значения параметров газа только в точках b_1, b_2, b_3. Параметры газа в точках b_4, b_5, b_6 будут равны параметрам газа соответственно в точках b_3, b_2, b_1.

Отыскав параметры газа в точках i-го «слоя», продвигаемся на следующий j-й «слой», содержащий точки c_1, c_2,…,c_5 (см. рис. 1), затем на m-й и т.д.

Обратим внимание, что каждый последующий слой содержит на одну расчетную точку меньше, чем предыдущий и, следовательно, последний расчетный слой содержит всего одну точку k. Параметры газа в этой точке v_k, a_k, M_k и будут расчетными параметрами газа на срезе сопла.

Выводы.

1. Показана процедура получения системы дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая двумерное изоэнтропическое течение идеального газа в сверхзвуковой части энергетического сопла.

2. Для полученной системы уравнений сформулирована задача Коши.

3. Составлен алгоритм численной реализации задачи Коши, на основании которого получены формулы для вычисления искомых параметров газа в сверхзвуковой области сопла и на его срезе.

Список литературы

1. *Абрамович, Г. Н.* Прикладная газовая динамика. Ч. 1: – М.: Наука, 1991. – 600 с.

2. *Рахматулин, Х. А.* Газовая динамика. / Х. А. Рахматуллин, А. Я. Сагомонян, А. И. Бунимович и др.– М.: Высшая школа, 1965. – 723 с.

3. *Пирумов, У. Г.* Газовая динамика сопел. / У. Г Пирумов, Г. С. Росляков – М.: Наука, 1990. – 368 с.

4. *Кошляков, Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики. / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: Высш. школа, 1970. – 712 с.