УДК 539.3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФУНКЦИИ СИНУСА И КОСИНУСА

Шарипов М.К., магистр, 1 курс
Научный руководитель: Абдукаримов А., к.ф.м.н., доцент
Ташкентский государственный технический университет
имени И.А.Каримова.
г. Ташкент.

В данной работе для решения неоднородного дифференциального уравнения излагается метод фундаментальных систем решения, предложенный Трикоми. Согласно этому методу, точное решение задачи при заданных начальных условиях строится с помощью обычной функции синуса и косинуса.

Как известно, общее решение уравнения

$$\ddot{Z}_i(t) + \omega_i^2 Z_i(t) = F_i(t), \quad i = \overline{1, N}. \tag{1}$$

является суммой общего решения однородного уравнения

$$\ddot{Z}_i(t) + \omega_i^2 Z_i(t) = 0 \tag{2}$$

и частного решения неоднородного уравнения (1). Для построения решения уравнения (2) при произвольных начальных условиях используем метод фундаментальных систем решения. Для этого индексы в уравнении (2) опустим и произведем замену $\omega t = x$. Тогда из системы (2) имеем для функции синуса и косинуса соответствующие уравнения

$$\ddot{Z}(x) + Z(x) = 0 \tag{3}$$

$$Z(0) = 0; \qquad \dot{Z}(0) = 1; \tag{4}$$

$$Z(0) = 1; \qquad \dot{Z}(0) = 0. \tag{5}$$

Решение уравнения (3) ищем в виде

$$Z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{6}$$

В случае начальных условий (4) положим $a_0 = 0,\ a_1 = 1,$ а в случае (5) - $a_0 = 1,\ a_1 = 0.$

Подставляя (6) в (3), для нахождения неизвестного коэффициента a_k получим рекуррентную формулу

$$a_{k+2} = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} a_k, \quad k = 0, 1, 2... \tag{7}$$

Вычисляя по формуле (6), для случая $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ имеем

$$a_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \quad k = 2,\ 3,\ \dots\ ; \tag{8}$$

а для случая $a_0 = 1,\ a_1 = 0$ -

$$a_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!}, \quad k = 2, 3, \dots\ . \tag{9}$$

Следовательно, решение уравнения (3) при начальных условиях (4) дает

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}; \tag{10}$$

а при начальных условиях (5) -

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\ . \tag{11}$$

Имея фундаментальные системы решения (10) и (11), можем построить решение уравнения (3), удовлетворяющее произвольным начальным условиям, т.е.

$$Z(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x. \tag{12}$$

Переходя к прежнему обозначению $x = \omega_i t$, из (12) имеем

$$Z_i(x) = c_{1i} \cos \omega_i t + c_{2i} \sin \omega_i t, \tag{13}$$

где c_{1i} и c_{2i} – произвольные постоянные.

Ряды (10) и (11) сходятся при любых значения *x*, однако при вычислении функции sin*x* и cos*x* по формулам (10) и (11) желаемая точность для *x*> 1 достигается со значительными трудностями, для преодоления которых обычно используются теоремы сложения функции синуса и косинуса, т.е.

$$\left.\begin{aligned} \sin x_{n+1} &= \sin(x_n + \Delta x) = \sin x_n \cos \Delta x + \cos x_n \sin \Delta x \\ \cos x_{n+1} &= \cos(x_n + \Delta x) = \cos x_n \cos \Delta x - \sin x_n \sin \Delta x \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$x_n = n \cdot \Delta x, \quad n = 1,\ 2,\ 3 \dots$$

и составляется таблица функций sin*x* и cos*x* для практического использования.

Имея общее решение однородного уравнения (13), общее решение неоднородного уравнения нетрудно построить методом вариации произвольных постоянных при произвольных начальных условиях, т.е.

$$Z_i(t) = Z_i(o)\cos \omega_i t + \frac{\dot{Z}_i(o)}{\omega_i} \sin \omega_i t + \frac{1}{\omega_i}\int_0^t F_i(\tau) \sin \omega_i (t-\tau) d\tau, \tag{15}$$

$$(i = \overline{1,\ N}).$$

В этом уравнении

ω_i - частота главных колебаний системы;

$Z_i(o)$ и $\dot{Z}_i(o)$ - значения обобщенных координат $Z_i(t)$ и обобщенной скорости $\dot{Z}_i(t)$ в начальный момент времени t = 0;

$F_i(t)$ - обобщенная сила, соответствующая любой системе возмущенных сил, изменяющихся с течением времени по какому угодно закону.

Таким образом, имея общее решение однородного уравнения (13), общее решение неоднородного уравнения (1) нетрудно построить методом вариации произвольных постоянных при произвольных начальных условиях.

Список литературы:

1. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. Из. Едиториал УРСС, 2010, 4 - изд. -352 с.
2. Бадалов Ф. Б., Хужаеров Н. Ю. Об одном методе точного решения интегро-дифференциальных уравнений динамических задач линейной теории вязкоупругости //Докл. АН. -1988. -№1. -С. 71-75.
3. Бадалов Ф. Б., Адукаримов А. Функции синуса и косинуса дробного порядка и их приложение к решению динамических задач наследственно-деформируемых систем.- Ташкент: ФАН, 2004.-155 с.