УДК 539.3

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФУНКЦИИ СИНУСА И КОСИНУСА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Боликулов Ш.Ш., бакалавр, 2 курс
Научный руководитель: Абдукаримов А., к.ф.м.н., доцент,
Халдыбаева И.Т. старший преподаватель.
Ташкентский государственный технический университет
имени И.А.Каримова.
г. Ташкент.

В данной работе для построения решения интегро-дифференциального уравнения (ИДУ) при произвольных начальных условиях используется метод фундаментальных систем решения упругих систем. Для решения интегро-дифференциального уравнения используется интегрально – операторный метод, согласно которому решение динамических задач наследственно–деформируемых систем наиболее эффективно осуществляется посредством применения принципа Вольтера.

Нетрудно заметить, что общие решения интегро-дифференциального уравнения (ИДУ)

$$\ddot{Z}_i(t) + \omega_i^2 (1 - R^*) Z_i(t) = F_i(t), \tag{1}$$

являются суммой общего решения однородного ИДУ

$$\ddot{Z}_i(t) + \omega_i^2 (1 - R^*) Z_i(t) = 0 \tag{2}$$

и частного решения неоднородного ИДУ (1). Для построения решения ИДУ (2) при произвольных начальных условиях используем метод фундаментальных систем решения упругих систем. Для простоты в дальнейшем индексы в (2) опустим.

Введем обозначение

$$\overline{\omega}^2 = \omega^2 (1 - R^*).$$

Тогда из (2) для функций синуса и косинуса дробного порядка получим соответственно ИДУ:

$$\ddot{Z}(t) + \overline{\omega}^2 Z(t) = 0; \tag{3}$$

$$Z(o) = 0; \quad \dot{Z}(o) = 1; \tag{4}$$

$$Z(o) = 1; \quad \dot{Z}(o) = 0; \tag{5}$$

Решим ИДУ (3) при начальных (4) и (5) условиях интегрально–операторным методом [1, 36], согласно которому решение динамических задач наследственно–деформируемых систем наиболее эффективно осуществляется посредством применения принципа Вольтера, на основании которого, принимая коммутативность временных интегральных и дифференциальных операторов, любую динамическую задачу наследственно–деформируемых систем следует решать так же, как и задачи упругих систем, и лишь в окончательном результате следует заменить упругие константы соответствующими интегральными операторами.

Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – фундаментальные системы решений уравнения (3), т.е. линейно-независимых частных решений однородного уравнения, удовлетворяющих соответственно начальным условиям (4) и (5). Тогда имеем:

$$y_1(t) = \frac{1}{\overline{\omega}} \sin \overline{\omega}\, t = \frac{1}{\overline{\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\overline{\omega}^{2n+1}\, t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\overline{\omega}^{2n}\, t^{2n+1}}{(2n+1)!};$$
$$y_2(t) = \cos \overline{\omega}\, t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\overline{\omega}^{2n}\, t^{2n}}{(2n)!}. \tag{6}$$

Далее, пользуясь разложением

$$\left(1 - R^*\right)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n}{i!(n-i)!} R^{*i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_i^n R^{*i},$$

оператор $\overline{\omega}^{2n} \varphi(t)$ можно расшифровать следующим образом:

$$\overline{\omega}^{2n} \varphi(t) = \omega^{2n} (1 - R^*) \varphi(t) = \omega^{2n} \left[\varphi(t) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_i^n \int_0^t R_i(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right], \tag{7}$$

так как

$$R^{*i} \varphi(t) = \int_0^t R_i(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

где

$$R_i(t) = \int_0^t R_{i-1}(t-\tau) R(\tau)\, d\tau, \qquad R_1(t) = R(t).$$

Пользуясь соотношениями (6) и (7), получим

$$y_1(t) = \frac{1}{\overline{\omega}} \sin \overline{\omega}\, t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} \left[t^{2n+1} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_i^n \int_0^t R_i(t-\tau) \tau^{2n+1} \alpha\tau \right] \tag{8}$$

$$y_2(t) = \cos \overline{\omega}\, t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} \left[t^{2n} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_i^n \int_0^t R_i(t-\tau) \tau^{2n} \alpha\tau \right] \tag{9}$$

Кроме того, нетрудно доказать, что

$$\cos \overline{\omega}\, t = \cos \omega t + c\phi(t), \quad \sin \overline{\omega}\, t = \omega \int_0^t \cos \overline{\omega}\, \tau\, d\,\tau = \sin \omega t + s\phi(t), \tag{10}$$

где

$$c\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\omega \sqrt[2n]{c_k(t)}\right)^{2n}}{(2n)!}; \quad c_k(t) = -1 + 2k \int_0^t (1-s)\, L_k(t\,s) ds;$$

$$L_k(t\,s) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i c_i^k \varphi_i(t\,s); \qquad \varphi_0(t\,s) = 1;$$

$$\varphi_i(t\,s) = \int_0^{ts} R(t\,s-\tau)\,\varphi_{i-1}(t\,\tau)\,d\tau\,.$$

Ряды, фигурирующие в (8) и (9), сходятся при всяком конечном значении t не только в случае ограниченности ядра $R(t - \tau)$, но и когда оно является слабо-сингулярным ядром наследственности типа Абеля.

Рассмотрим случай, когда

$$R(t-\tau) = \varepsilon\,(t-\tau)^{\alpha-1}, \qquad \varepsilon > 0, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Тогда повторные ядра будут иметь вид:

$$R_i(t-\tau) = \varepsilon_1^i\,\frac{(t-\tau)^{\alpha i-1}}{\Gamma[\alpha i]}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon\,\Gamma[\alpha], \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots \tag{11}$$

Подставляя (11) в (8) и (9), и учитывая, что

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha i-1}\tau^m\,d\,\tau = \frac{\Gamma[\alpha i]\cdot\Gamma[m+1]}{\Gamma[\alpha i+m+1]}\,t^{\alpha i+m}, \tag{12}$$

получим, полагая при этом в (12) последовательно $m = 2n$ и $m = 2n+1$, искомые выражения для $\cos\overline{\omega}\,t$ и $\frac{1}{\overline{\omega}}\sin\overline{\omega}\,t$, т.е.

$$y_1(t) = \frac{1}{\overline{\omega}}\sin\overline{\omega}\,t = \frac{1}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\,c_i^n\,\frac{\Gamma[2n+2]t^{\alpha i}\varepsilon_1^i}{\Gamma[\alpha i+2n+2]}; \tag{13}$$

$$y_2(t) = \cos\overline{\omega}\,t = \cos t + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(\omega t)^{2n}}{(2n)!}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\,c_i^n\,\frac{\Gamma[2n+1]t^{\alpha i}\varepsilon_1^i}{\Gamma[\alpha i+2n+1]}. \tag{14}$$

Ряды, фигурирующие в (13)–(14), сходятся абсолютно и равномерно при всяком конечном значении t. Функции (13) – (14), следуя работе [3,6], будем называть соответственно синусами и косинусами дробного порядка, а ИДУ

$$\ddot{y}_1(t) + \omega^2[y_1(t) - \int_o^t R(t-\tau)\,y_1(\tau)\,d\tau] = 0, \tag{15}$$

$$\ddot{y}_2(t) + \omega^2[y_2(t) - \int_o^t R(t-\tau)\,y_2(\tau)\,d\tau] = 0, \tag{16}$$

при ядрах Абеля

$$R(t) = \varepsilon t^{\alpha-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{17}$$

где ε и α называется реологическим параметром, определяемым экспериментально и Ржаницына–Колтунова

$$R(t) = \varepsilon e^{-\beta t}\,t^{\alpha-1}, \qquad \varepsilon > 0, \quad \beta > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{18}$$

где ε– параметр вязкости; β – параметр затухания; α – параметр сингулярности ядра наследственности при соответствующих начальных условиях $y_1(0) = 0,\ \ \dot{y}_1(0) = 1$ и $y_2(0) = 1,\ \ \dot{y}_2(0) = 0$ ИДУ функции синуса и косинуса дробного порядка.

Таким образом, имея фундаментальные системы решения ИДУ (15) и (16), можем построить решения ИДУ (2), удовлетворяющие произвольным начальным условиям, т.е.

$$Z(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Список литературы:

1. Розовский М. И. Интегрально–операторный метод в наследственной теорией ползучести //Докл. АН. -1965. -№4. -С. 792-799.
2. Бадалов Ф. Б., Эшматов Х. Интегрально-операторный метод для решения уравнения вынужденных колебаний вязкоупругих систем // Материалы VI всесоюзной конференции по композиционным материалам. -Ереван, 1987.- Т.2. (Ереван, Ленинакан, 13-15 октября 1987 г.). –С. 44 – 45.
3. Розовский М. И. Механика упруго-наследственных сред //Итоги науки: упругость пластичность. -ВИНИТИ, -1967. С 167-250.
4. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. -М.: Наука, 1977. -384 с.
5. Бадалов Ф. Б., Хужаеров Н. Ю. Об одном методе точного решения интегро-дифференциальных уравнений динамических задач линейной теории вязкоупругости //Докл. АН. -1988. -№1. -С. 71-75.
6. Бадалов Ф. Б., Адукаримов А. Функции синуса и косинуса дробного порядка и их приложение к решению динамических задач наследственно-деформируемых систем.- Ташкент: ФАН, 2004.-155 с.