УДК 519.7

ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ЭКОНОМИКЕ

Шмидт О. Е., студент гр. БЭс-192, II курс
Черница К. И., студент гр. БЭс-192, II курс
Липина Г. А., старший преподаватель
Научный руководитель: Кузнецова А. В., к.т.н., доцент
Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева,
г. Кемерово

Математика и экономика являются самостоятельными отраслями знаний, каждая из которых имеет свой объект и предмет исследования. Математика в качестве научного знания создает многофункциональные аналитические методы исследования различных связей и приобретения новых связей в окружающем нас мире. Все это делает математику универсальным инструментом в решении многих задач и головоломок, с которыми повсеместно сталкиваются ученые из иных научных областей, к примеру, экономике, химии, физике, психологии и других [1,2].

Одной из областей знаний, в которой наиболее обширно и повсеместно используется средства математики и математического анализа в целом является экономика. Посредством математики и, в частности, использования определенного интеграла достигаются колоссальные результаты в изучении множества экономических процессов и явлений.

Таким образом, элементы математического анализа занимают ключевое место в области экономики. Элементы дифференциального и интегрального исчисления строго формулируют многие законы природы, происходящие в современном мире. Интеграл, активно использующийся при решении экономических задач, является одним из важнейших понятий математики, которое возникло в результате потребности, как с одной стороны – отыскать функции, зная их производные, и как с другой – измерить различные значения геометрических фигур.

На сегодняшний день интегральное исчисление и, в частности, определенный интеграл используется при решении колоссального количества экономических задач, некоторые примеры из которых будут более подробно рассмотрены далее в данной статье [3].

Так, к примеру, при экономических подсчетах возникает необходимость найти объем произведенной продукции за несколько лет (например, с помощью функции Кобба-Дугласа). Если в функции Кобба-Дугласа затраты труда – это линейная зависимость от времени, а затраты капитала постоянны, то эта функция будет выглядеть следующим образом: $f(t)=(\alpha t+\beta)e^{\gamma t}dt$

Приведем соответствующий пример, одним из средств в решении которого является определенный интеграл:

Пример 1. Необходимо найти количество произведенной за 3 года продукции, если функция Кобба-Дугласа выглядит согласно формуле 1:

$$f(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t} \tag{1}$$

Решение. Пусть Q – количество произведенной продукции, то по вышеуказанной формуле 1, будет равно $Q = \int_0^3 (2t+1)e^{4t}$. Для нахождения данного интеграла применим формулу интегрирования по частям. Пусть *u=2t+1*, а $dv=e^{4t}$, то *du=dt*, $v = \int e^{4t} = \frac{1}{4}e^{4t}$.

В результате преобразований количество произведенной продукции будет равно:

$$Q = \int_0^3 (2t+1)e^{4t} = (2t+1)\cdot\frac{1}{4}e^{4t}\Big|_0^3 - \int_0^3 2\cdot\frac{1}{4}e^{4t} = \frac{6e^{12}-1}{4} - \frac{1}{2}\int_0^3 e^{4t} = \tag{2}$$

$$= \frac{13e^{12}-1}{32} = 66119{,}1 \text{ у.е.}$$

Рассмотрим следующий пример. Определенный интеграл может использоваться при нахождении среднего времени, затраченного на изготовление одной единицы продукции. Пусть $t=t(x)$ – функция, которая описывает изменение затрат времени, где x – номер готового изделия в партии. Тогда среднее время, затраченного на изготовление одного изделия будет равно:

$$T_{\text{ср.}} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)dx, \text{ где } t=ax^{-b} \tag{3}$$

Рассмотрим это на примере следующей ситуации:

Пример 2. Найти среднее время изготовления одного изделия в период от $x_1 = 200$ до $x_2 = 250$, $a = 800$, $b = 0{,}25$.

Решение. Применяя формулу 3, получим

$$T_{\text{ср.}} = \frac{1}{250-200}\int_{200}^{50} 800\sqrt[4]{x}dx = 3096 \text{ минут.}$$

Таким образом, среднее время на изготовления одной единицы продукции составило 3096 минут.

На этом функции определенного интеграла в экономике не заканчиваются. С его помощью также можно определять дисконтированный доход за t лет. Дисконтирование вообще – определение базисной суммы по ее конечной величине через определенное количество времени при постоянном годовом проценте. Дисконтирование помогает оценивать эффективность капиталовложений. При решении задач подобного типа используется формула 4:

$$K_t = K(1 + it), \quad (4)$$

где $i = 0{,}01p$ – удельная ставка процента.

Если из этой формулы выразить *К*, получим формулу 5:

$$K = \frac{K_t}{(1 + it)}, \quad (5)$$

Однако, эта формула не подходит для вычисления сложных процентов. Сложный процент – это получение процентов от уже имеющихся процентов(так называемые «двойные проценты»). При наличии сложных процентов формула 4 будет преобразована в формулу 6:

$$K_t = K(1 + it)^t, \quad (6)$$

А формула 5 преобразуется к следующему виду:

$$K = \frac{K_t}{(1 + it)^t}, \quad (7)$$

Допустим, что ежегодно поступающий доход не является постоянным и его можно описать функцией *f(t),* а процент *i* начисляется непрерывно. В данном случае дисконтированный доход за время *К* за количество лет *Т* может вычисляться по формуле 8:

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}dt \quad (8)$$

В результате работы можно отметить, что на сегодняшний день практически невозможно назвать такую область деятельности современного человека, в которой бы не применялись средства математического анализа [4]. При всем при этом именно интегральное исчисление является одним из ключевых разделов математики, используемым при описании и решении прикладных задач, в частности, при исследовании экономических процессов или явлений.

Основной целью данной работы являлось изучение применения определенного интеграла в экономических задачах. В результате работы определена актуальность использования интегрального исчисления при исследовании экономических процессов, а также рассмотрены частные примеры, подтверждающие эффективность и рациональность использования определенного интеграла при решении экономических задач.

Список литературы

1. Спиридонова, Н.В. Профессионально ориентированный подход в изучении раздела «интегральное исчисление» при подготовке специалистов экономического профиля // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Психолого-педагогич. науки. 2017.

2. Ляликова, Е.Р. Приложения определенного интеграла к решению задач экономики // Молодой ученый. 2015.

3. Buldyk G. M. Collection of problems and exercises in higher mathematics with examples of solutions. - M.: Unipress. 2002.

4. Котельникова, М.Н., Соколов Н.Н. Об анализе содержания курса математического анализа для экономистов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013.