УДК 51

ОДНА ИЗ ЗАДАЧ НА ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Волков В.М., доцент кафедры математики, к.ф.-м.н.
Герасимова П.Д., студент гр. ГМс-201, 1 курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

В данной работе рассматривается следующий вопрос: для каких многочленов *f(x)* существует многочлен *P(x)* степени *n* такой, что $f(P(x)) \vdots f(x)$. В данной работе найдены условия, при которых найдётся многочлен, удовлетворяющий данному условию.

Примечания.

1. В данной работе запись $f(x) \vdots g(x)$ означает, что многочлен *f(x)* делится без остатка на многочлен *g(x)*.

2. Многочлены в формулировках теорем данной работы имеют действительные коэффициенты.

Пример 1. Существует ли многочлен *P(x)* 2001-й степени такой, что $P(x^2-1)$ делится на *P(x)*?

Решение данной задачи было приведено в ранних работах автора и характеризует специфику исследований такого рода. Приведем пример, который показывает, что вопрос о существовании соответствующего многочлена не всегда решается положительно.

Пример 2. Доказать, что не существует многочлена *P(x)* нечётной степени такого, что $P(\boldsymbol{x^2+\frac{\pi}{4}}) \vdots P(x)$.

Доказательство данной задачи также было приведено в предыдущих работах автора.

После решения этих двух задач возникает естественный вопрос, поставленный в задаче, обобщающей эти две. Эта задача и является первой проблемой, которая решается в данной работе.

Решение проблемы.

Проблема: «Для каких многочленов *f(x)* существует многочлен *P(x)* степени n такой, что $f(P(x)) \vdots f(x)$?»

Решение этой проблемы дают теоремы 1, 2.

Теорема 1. Пусть многочлен *f(x)* на множестве комплексных чисел имеет $k \geq 1$ различных корней. Тогда при:

а) $\boldsymbol{n=1}$;

б) $\boldsymbol{n \geq k}$;

в) $\boldsymbol{n=k-1}$, если все корни многочлена действительны;

существует многочлен *P(x)* степени n такой, что $f(P(x)) \vdots f(x)$.

Доказательство.

а) Положим *P(x)*=*x*. Тогда: $\boldsymbol{f(P(x)) = f(x) \vdots f(x)}$.

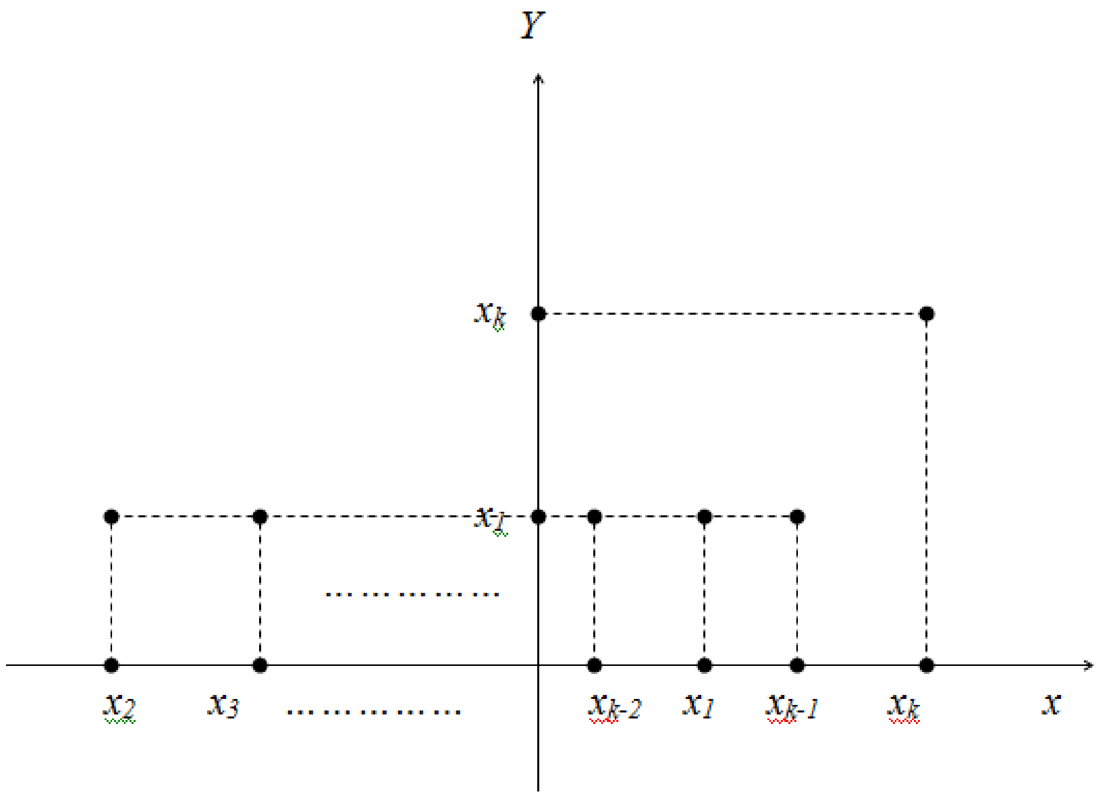
Замечание. Теорема 1(а) верна и для многочленов *f(x)* и *P(x)* с произвольными комплексными коэффициентами.

б) Пусть $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)^{a_1}(x - x_2)^{a_2} \dots (x - x_k)^{a_k}}$. Тогда многочлен $P(x) = \boldsymbol{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)g(x) + x}$, где *g(x)* — произвольный многочлен степени *(n – k)*, удовлетворяет требованиям задачи. Действительно, для любого x_i, где $\boldsymbol{1 \le i \le k}$, $\boldsymbol{P(x_i) - x_i = 0}$, т.е. $\boldsymbol{P(x) - x_i \vdots x - x_i}$ $f(P(x))=\boldsymbol{(P(x) - x_1)^{a_1}(P(x) - x_2)^{a_2} \dots (P(x) - x_k)^{a_k} = f(x)}$.

Замечание. Теорема 1(б) верна и для многочленов *f(x)* и *P(x)* с произвольными комплексными коэффициентами. Доказательство совпадает с доказательством для многочленов с действительными коэффициентами.

в) Этот пункт теоремы доказывается графическим методом. Пусть x_1 — корень многочлена $f(x)=a\boldsymbol{(x - x_1)^{a_1}(x - x_2)^{a_2} \dots (x - x_k)^{a_k}}$ с наибольшей кратностью, т.е $\boldsymbol{a_1 \ge a_2, a_1 \ge a_3, \dots, a_1 \ge a_k}$. Тогда

$$f(P(x))=\boldsymbol{(P(x) - x_1)^{a_1} \dots (P(x) - x_k)^{a_2} \vdots (P(x) - x_1)^{a_1}(P(x) - x_k)^{a_k} \vdots (x - x_{k-1})^{a_1}(x - x_k)^{a_k} \vdots f(x)}.$$



Все пункты теоремы 1 доказаны.

Теорема 2. Если многочлен *f(x)* имеет *k*≥ 3 различных корней на множестве комплексных чисел, то многочлен *P(x)* степени $(k-1)$ такой, что $f(P(x)) \vdots f(x)$ не существует в том и только в том случае, если k нечётно и $f(x) = u(x-s)^{a_0}(x-(s+t_1 i))^{a_1}(x-(s-t_1 i))^{a_1} \dots (x - \left(s + t_{\frac{k-1}{2}} i\right))^{a_{\frac{k-1}{2}}} \times$ $\times\, (x - (s - t_{\frac{k-1}{2}} i)^{a_{\frac{k-1}{2}}}$, *где* $u, s, t_1, \dots, t_{\frac{k-1}{2}} \in R$, $a_0, a_1, \dots, a_{\frac{k-1}{2}} \in N$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $f(x)=u(x-x_1)^{a_1}\dots(x-x_k)^{a_k}$. Если все корни многочлена *f(x)* вещественны, то мы приходим к теореме 1(в). Пусть у многочлена *f(x)* есть комплексные корни. Пусть $x_{1,2}=s\pm ti$— комплексные корни многочлена *f(x)* наименьшей кратности. Рассмотрим многочлены *P(x)* вида: $(bx+c)(x-x_3)\dots(x-x_k)+x$. Ясно, что, если *m=3,…,k*, то $P(x_m)=x_m$, т.е. x_m — корень многочлена $P(x)-x_m \Rightarrow P(x)-x_m \vdots x-x_m$. Значит: $f\big(P(x)\big)=(P(x)-(s+ti))^{a_1}\big(P(x)-(s-ti)\big)^{a_1}(P(x)-x_3)^{a_3}\dots$

$(P(x)-x_k)^{a_k} \vdots (x-x_3)^{a_3}\dots(x-x_k)^{a_k}$,

и достаточно подобрать такие b и c, чтобы
$f\big(P(x)\big) \vdots (x-(s+ti))^{a_1}(x-(s-ti))^{a_1}$. Подберём такие b и c, чтобы *P(s+ti)* было равно $s-ti$, тогда $P(s-ti)=P(\overline{s+ti})=\overline{P(s+ti)}=\overline{s-ti}=s+ti$, т.е. *s+ti* — корень многочлена *P(x)−(s–ti)*, а *s−ti* — корень многочлена *P(x)−(s+ti), т.е.* $P(x)-(s-ti) \vdots x-(s+ti)$, и $P(x)-(s+ti) \vdots x-(s-ti)$, т.е.

$f\big(P(x)\big)=(P(x)-(s+ti))^{a_1}\big(P(x)-(s-ti)\big)^{a_1}(P(x)-x_3)^{a_3}\dots(P(x)-x_k)^{a_k} \vdots (x-(s-ti))^{a_1}(x-(s+ti))^{a_1}$. Пусть $(s+ti-x_3)\dots(s+ti-x_k)=h+di$.

Тогда: $P(s+ti)=(bs+c+bti)(h+di)+s+ti=(bsh+ch-btd+s)+$ $+(bth+bsd+cd+t)i$. $P(s+ti)=s-ti$, если верно:

$\begin{cases} bsh+ch-btd+s=s \\ bth+bsd+cd+t=(-t) \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} b=\frac{-2th}{t(d^2+h^2)}=\frac{-2h}{d^2+h^2} \\ c=\frac{2t(sh-td)}{t(h^2+d^2)}=\frac{2(sh-td)}{h^2+d^2} \end{cases}$ (мы делим на t, т.к. $t\neq 0$ по предположению, а $h^2+d^2\neq 0$, т.к. в противном случае *h=d=0*, и $(s+ti-x_3)\dots(s+t-x_k)=h+di=0$, чего быть не может). Если $b\neq 0$, то подставляя найденные b и c, мы находим искомый *P(x)*. Значит *P(x)* степени *(k*−1) может не найтись лишь тогда, когда *b=0*, т.е. *h=0*, и $(s+ti-x_3)\dots(s+ti-x_k)=di$. Пусть $s_0\pm t_0 i$ — комплексные корни многочлена *f(x)*, отличные от $s\pm ti$. Подберём такие b и c, чтобы $P(s+ti)$ было равно $s_0+t_0 i$, тогда $P(s-ti)=P(\overline{s+ti})=\overline{P(s+ti)}=\overline{s_0+t_0 i}=s_0-t_0 i$, т.е. *s+ti*— корень многочлена $P(x)-(s_0+t_0 i)$, а $s-ti$ — корень многочлена $P(x)-(s_0-t_0 i)$, т.е. $P(x)-(s_0+t_0 i) \vdots x-(s+ti)$, и $P(x)-(s_0-t_0 i) \vdots x-(s-ti)$. Т.к. $s_0\pm t_0 i\in\{x_j \mid 3\le j\le k\}$, и кратность этих корней не меньше кратности корней $s\pm ti$, то $f\big(P(x)\big) \vdots (x-x_3)^{a_3}\dots(x-x_k)^{a_k} \vdots (P(x)-(s_0+t_o i))^{a_1}(P(x)-(s_0-t_0 i)^{a_1} \vdots (x-(s+ti))^{a_1}\big(x-(s-ti)\big)^{a_1}$, $P(s+ti)=s_0+t_0 i$, если:

$\begin{cases} s-btd=s_0 \\ bsd+cd+t=t_0 \end{cases}$ (слагаемые, содержащие h, отброшены, т.к. *h=0*).

Значит $P(s+ti)=s_0+t_0 i$, если

$$\begin{cases} b=\dfrac{s-s_0}{td} \\ c=\dfrac{t_0 t-t^2-s^2+s_0 s}{td} \end{cases}$$

Если $s_0 \neq s$, то, подставляя эти значения b и c, мы получим искомый *P(x)*. Значит *P(x)* может не оказаться лишь в том случае, если у любого комплексного корня $s_0 + t_0 i$ действительная часть совпадает с s, т.е. $s_0 = s$. Значит многочлен *f(x)* имеет вид:

$$\mathrm{f}(x) = u(x - (s + t_1 i)^{a_1}(x - (s - t_1 i))^{a_1} \dots (x - (s + t_m i))^{a_m} \times \big(x - (s - t_m i)\big)^{a_m}(x - s_{2m+1})^{a_{2m+1}} \dots (x - s_k)^{a_k}, \text{где } s_{2m+1}, \dots, s_k \in R.$$

Докажем, что, если *P(x)* не существует, то *f(x)* имеет ровно один действительный корень. Если *f(x)* не имеет ни одного действительного корня, то $(s + t_1 i - x_3)(s + t_1 i - x_4) \dots (s + t_1 i - x_k) = \big((t_1 - t_2)i \times (t_1 + t_2)i\big) \dots \big((t_1 + t_m)i\big) = i^2(t_1^2 - t_2^2) \dots i^2(t_1^2 - t_m^2) = (-1)^m(t_1^2 - t_2^2) \dots (t_1^2 - t_m^2) = h \in R,$ что противоречит тому, что $(s + t_1 i - x_3) \dots (s + t_1 - x_k) = di$. Пусть *f(x)* имеет минимум два корня — s_k и s_{k-1}. Пусть $a_{k-1} \geq a_k$. Рассмотрим многочлен $P(x) = v(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1}) + x$. При $1 \leq j \leq k-1$, $P(x_j) = x_j \Rightarrow \big(P(x) - x_j\big) \vdots\, x - x_j \Rightarrow f\big(P(x)\big) \vdots\, (P(x) - x_j)^{a_j} \vdots\, \big(x - x_j\big)^{a_j}$. Значит для того, чтобы выполнялось $f\big(P(x)\big) \vdots\, (f(x)$ нужно подобрать такое *v*, чтобы
$f\big(P(x)\big) \vdots\, (x - x_k)^{a_k}$. Возьмём такое *v*, чтобы выполнялось:
$\mathrm{P(x_k) = v(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}) + x_k = x_{k-1}}$, т.е. $\mathrm{v} = \frac{\mathrm{x_{k-1} - x_k}}{\mathrm{(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})}}$.
Тогда: $\mathrm{(P(x) - x_{k-1}) \vdots (x - x_k) \Rightarrow f(P(x)) \vdots (P(x) - x_{k-1})^{a_{k-1}} \vdots (P(x) - x_{k-1})^{a_k} \vdots (x - x_k)^{a_k}}$. Мы доказали, что f(x) имеет вид: $\mathrm{f(x) = u(x - s_0)^{a_0}(x - (s + {} + t_1 i))^{a_1}(x - (s - t_1 i))^{a_1} \times \dots (x - (s + t_{\frac{k-1}{2}} i))^{\frac{a_{k-1}}{2}}(x - (s - t_{\frac{k-1}{2}}))^{\frac{a_{k-1}}{2}}}$. $\mathrm{(s + t_1 i - {} - x_3)(s + t_1 i - x_4) \dots (s + t_1 i - x_k) = \Big(-1)^m(t_1^2 - t_2^2) \dots \Big(t_1^2 - t_{\frac{k-1}{2}}^2\Big)(s - s_0) + {} + t_1 i\Big) = h(s - s_0) + ht_1 i}$, где $\mathrm{h \in R}$. Как было доказано раньше,
$\mathrm{h(s - s_0) = 0 \Rightarrow s_0 = s}$, т.е. мы доказали, что f(x), должен иметь вид, указанный в условии. Докажем теперь, что для многочлена $f(x) = u(x - s)^{a_0}(x - {} - (s + t_1 i))^{a_1}(x - (s - t_1 i))^{a_1} \dots (x - \Big(s + t_{\frac{k-1}{2}} i\Big))^{\frac{a_{k-1}}{2}}(x - \Big(s - t_{\frac{k-1}{2}} i\Big))^{\frac{a_{k-1}}{2}}$ не существует такого *P(x)* степени $(\mathrm{k} - 1)$, что $f\big(P(x)\big) \vdots\, (f(x)$. Предположим противное. Ясно, что *P(s)* — действительное число. С другой стороны *P(s)* — корень многочлена *f(x)*. Значит *P(s)=s*. Значит *P(x)* можно представить в виде: *P(x)=(x−s)g(x)+s*, где *g(x)* — многочлен степени $(k-2)$. Рассмотрим произвольный корень многочлена *f(x)*, отличный от *s*. Он имеет вид *(s+ti)*. Пусть *g(s+ti)=a+bi*. Значит *P(s+ti)=(s+ti−s)g(s+ti)+s=ti(a+bi)+s=(s−bt)+ati*. Т.к. *P(s+ti)* — корень многочлена *f(x)*, то его действительная часть равна *s*. Значит *s−bt=s*, т.е. *bt=0*. Т.к. *t*≠0, то *b=0*, т.е. *g(s+ti)*— действительное число. Т.к. *(s+ti)* — произвольный корень *f(x)*, то все числа: $g(s \pm t_1 i)$, $g(s \pm t_2 i), \dots$ $g(s \pm t_{\frac{k-1}{2}} i)$ — действительные. Ясно, что $\frac{k-1}{2}$ — целое число. Пусть $\frac{k-1}{2} = m$. Тогда *k−1=2m*, *k−2=2m−1*. Пусть *g(s+xi)=Q(x)+R(x)i*, где *Q(x)* и

R(x) — многочлены с действительными коэффициентами. Т.к. степень многочлена *g(x)* нечётна, то степень многочлена *R(x)* равна степени этого многочлена, т.е. ($2m-1$). С другой стороны при x равном $\pm t_1, \pm t_2, \dots \pm t_m$ многочлен *R(x)* должен быть равен 0, т.е. этот многочлен имеет не менее $2m$ корней, т.е. его степень не менее $2m$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

Замечание. Теорема 2 не верна, если предполагать, что коэффициенты многочленов *P(x)* и *f(x)* могут быть не только действительными, но и произвольными комплексными числами. В этом случае многочлен *P(x)* степени $(k-1)$ существует для любого *f(x)*. Докажем это. Пусть x_1 — корень многочлена $f(x) = a(x-x_1)^{a_1}(x-x_2)^{a_2} \dots (x-x_k)^{a_k}$ с наибольшей кратностью, т.е. $a_1 \geq a_2, a_1 \geq a_3, \dots, a_1 \geq a_k$. Тогда рассмотрим многочлен
$P(x) = \frac{x_k - x_1}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})}(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1}) + x_1$.
Т.к. $P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_{k-1}) = x_1$, , , то $x_1, x_2 \dots x_{k-1}$ — корни многочлена $P(x) - x_1$, т.е. $P(x) - x_1 \vdots (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1})$.
Т.к. $\mathrm{P}(x_k) = (x_k - x_1)\frac{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})} + x_1$, то x_k — корень многочлена $P(x_k) - x_k$, т.е. $P(x_k) - x_k \vdots (x - x_k)$.

Из вышесказанного следует, что: $f\big(P(x)\big) = (P(x)-x_1)^{a_1}(P(x) - -x_2)^{a_2} \dots (P(x)-x_k)^{a_k} \vdots \big((x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1})\big)^{a_1} \times (x-x_k)^{a_k} \vdots (x--x_1)^{a_1}(x-x_2)^{a_2}\dots(x-x_k)^{a_k} = f(x)$, т.е. *P(x)* удовлетворяет требуемым условиям.

Список литературы:

1. А.Г.Курош. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975.