УДК 51

О ПРИМЕНЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ

Николаева Е.А., к.ф.-м.н., доцент
Замятин В.В., студент гр. ПИб-192, II курс,
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

Все люди относятся к риску по-разному: одни не любят рисковать, другие наоборот, а третьи о нем не задумываются. Давайте разберемся. В математике существуют способы выявить и оценить риск, а значит принять правильное решение.

Определим некую лотерею распределением вероятностей по средствам функции распределения $F(x)$ - вероятность того, что выигрыш составит не меньше x. Определим функцию $u(x)$ - функция полезности.

Из теории ожидаемой полезности полезность лотереи рассчитывается по формуле:

$$u(F)=\int_R u(x)dF(x).$$

Пусть описываемое распределение является непрерывным, плотность распределения f, тогда

$$u(F)=\int_R u(x)f(x)dx$$

- средняя ожидаемая полезность лотереи.

Рассмотрим наиболее типичные функции полезности денег. Первая из них – квадратичная функция полезности или функция полезности Неймана-Моргенштерна:

$$u(x)=ax-bx^2, \quad a,b>0$$

Вторая, логарифмическая функция полезности:

$$u(x)=\log_a x, \quad a>0$$

Вычислим размер денежных средств, который будет равноценен величине полезности. Пусть функция полезности задана как $u(x)=\ln(x+1)$, функция распределения F задает равномерное распределение на отрезке $[9,19]$, а плотность распределения является постоянной на отрезке $[9,19]$ $f(x)=0{,}1$.

Вычислим размер денежных средств ($c(F)$), который равноценен величине полезности $\int_R u(x)dF(x)$, т.е. для которого выполняется равенство

$$u(c(F))=\int_R u(x)dF(x) \tag{1}$$

- аналог стоимости лотерейного билета.

$$\int_9^{19} u(x)dF(x)=\int_9^{19} 0{,}1\cdot\ln(x+1)dx=0{,}1\cdot(x+1)\cdot(\ln(x+1)-1)\Big|_9^{19}=\ln 40-1$$

Вычислим $c(F)$ из уравнения (1).

$$\ln(c+1)=\ln 40-1$$

$$c(F)=\frac{40}{e}-1\approx 13{,}76$$

Вычислим $\int_R xdF(x)$. Для данного равномерного распределения математическое ожидание есть

$$\int_9^{19} xdF(x)=\frac{9+19}{2}=14.$$

В математической экономике часто используют термин богатство – это внешние благо, которые поддаются денежному измерению.

Рассмотрим еще задачу: функция полезности индивидуума $u(x)=\sqrt{x}$, уровень богатства равен 16. Найдем вероятностную премию за риск в лотерее: вероятность 1/2 дает выигрыш 4 и проигрыш 4.

Вероятностная премия за риск (e) удовлетворяет уравнению:

$$u(x)=\left(\frac{1}{2}+e\right)\cdot u(x+4)+\left(\frac{1}{2}-e\right)\cdot u(x-4)$$

$$16=\left(\frac{1}{2}+e\right)\cdot\sqrt{16+4}+\left(\frac{1}{2}-e\right)\cdot\sqrt{16-4}$$

$$e=0{,}04$$

Таким образом, индивидууму при заданном уровне богатства (16) данная лотерея не интересна, а точнее безразлична.

Пусть на выбор есть две лотереи. Попробуем ответить математически стоит или нет в них участвовать.

Первая лотерея:

X_1	значение	0	4
	вероятность	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Вторая лотерея:

X_2	значение	1	9
	вероятность	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$

Рассчитаем статистические характеристики для обеих лотерей, такие как математическое ожидание и дисперсия.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(x))^2 \cdot p_i$$

$$M(X_1) = 2$$

$$M(X_2) = 2$$

$$D(X_1) = 4$$

$$D(X_2) = 7.$$

У лотерей средний ожидаемый выигрыш (математическое ожидание) одинаковый, а дисперсии разные, а риск (дисперсия) разный. Таким образом, первая лотерея выгоднее, чем вторая.

Добавим к данным условиям функцию полезности $u(x) = \sqrt{x}$, средняя полезность лотерей:

$$u(X_1) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4} = 1$$

$$u(X_2) = \frac{7}{8} \cdot \sqrt{1} + \frac{1}{8} \cdot \sqrt{9} = \frac{10}{8}.$$

Если учитывать при принятии решения полезность, то нужно выбирать первую лотерею. При одновременном рассмотрении двух критериев однозначный выбор сделать проблематично. Окончательный выбор будет зависеть от предпочтений индивидуума, его склонности к риску, настроения и т.п.

Список литературы:

1. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. Пособие для студентов вузов – Москва: Высшая школа, 2004. - 404 с.
2. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3т. Т.1. – М.: Высш. шк., 1988. – 712 с.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3т. Т.2. – М.: Высш. шк., 1989. – 651 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3т. Т.3. – М.: Высш. шк., 1988. – 817 с.