

УДК 51

НАХОЖДЕНИЕ КРИТЕРИАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА И ЭФФЕКТИВНОГО ПОРТФЕЛЯ

Николаева Е.А., к.ф.-м.н., доцент
Лобач Е.В., студент гр. БЭб-201, I курс,
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

В портфельной теории часто рассматривается модель Блэка. Коротко опишем ее суть: правильно вычислить стоимость актива, которую называют ожидаемой волатильностью актива. Для того, что бы говорить об эффективных портфелях нам потребуется еще ряд сведений из портфельной теории.

Портфель, состоящий из различных активов можно оценить с помощью ожидаемой доходности (M) и ожидаемого риска (V). Определим координатную плоскость (M, V) и отметим на ней все возможные портфели.

Плоскостью оценок называется плоскость, в которой отображаются оценки портфелей. Критериальное множество это облик допустимого множества в плоскости оценок. Также доказано, то оценки эффективных портфелей находятся на границе критериального множества. Эффективная граница критериального множества это множество оценок всех эффективных портфелей.

Рассмотрим два актива A_1, A_2 . Допустимым множеством является прямая:

$$x = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 1, x_i \geq 0\},$$

здесь x_i – доля стоимости актива i в общей стоимости портфеля, составленного из этих активов.

Определим активы с помощью вектора ожидаемой доходности:

$$m = (m_1, m_2), \quad (m_1 \neq m_2)$$

и матрицы ковариации:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

где c_{ij} - ковариация между активами i, j .

Рассчитаем ожидаемую доходность портфеля

$$E[x] = m_1 x_1 + m_2 x_2, \quad (1)$$

и ожидаемый риск портфеля

$$V[x] = c_{11}(x_1)^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}(x_2)^2. \quad (2)$$

Так как $x_1 + x_2 = 1$, отсюда $x_2 = 1 - x_1$ подставим в (1)-(2):

$$E = E[x] = m_1x_1 + m_2(1 - x_1) = (m_1 - m_2)x_1 + m_2, \quad (3)$$

$$V[x] = c_{11}(x_1)^2 + 2c_{12}x_1(1 - x_1) + c_{22}(1 - x_1)^2 \quad (4)$$

Найдем из (1)-(3) x_1, x_2

$$x_1 = \frac{m_2 - E}{m_2 - m_1}, \quad x_2 = \frac{E - m_1}{m_2 - m_1},$$

Подставим в (4):

$$\begin{aligned} V(E) &= c_{11} \left(\frac{m_2 - E}{m_2 - m_1} \right)^2 + 2c_{12} \left(\frac{m_2 - E}{m_2 - m_1} \right) \left(\frac{E - m_1}{m_2 - m_1} \right) + c_{22} \left(\frac{E - m_1}{m_2 - m_1} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{(m_2 - m_1)^2} (AE^2 + BE + F) = \alpha_2 E^2 + \alpha_1 E + \alpha_0, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_2 = A/\mu,$$

$$\alpha_1 = B/\mu,$$

$$\alpha_0 = F/\mu, = (\mu_2 - m_1)^2$$

и

$$A = c_{11} - 2c_{12} + c_{22}; \quad B = -2c_{11}m_2 + 2c_{12}(m_1 + m_2) - 2m_1c_{22},$$

$$F = c_{11}m_2^2 - 2c_{12}m_1m_2 + c_{22}m_1^2 \quad (5)$$

Кривая, задающая критериальное множество описывается уравнением

$$V(E) = \alpha_2 E^2 + \alpha_1 E + \alpha_0 \quad (6)$$

Пусть $m_1 \neq m_2$, тогда при $\alpha_2 \neq 0$, эта кривая есть парабола, а эффективная граница - правая ветвь параболы.

Если $\alpha_2 = 0$, то критериальным множеством является прямая с коэффициентом наклона:

$$\kappa = \alpha_1 = V/(m_2 - m_1)^2.$$

Если $m_1 = m_2 = m$ (вырожденный случай), то доходность всех портфелей одинакова (m). Критериальным множеством является вертикальная прямая.

Так как инвесторы выбирают эффективные портфели из множества портфелей, то уравнение эффективной границы дает понять о том, что повышение доходности выбираемого портфеля неизменно сопровождается повышением его риска.

Зададим числовые значения и рассчитаем характеристики.

$$m = (1,2), \quad c = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем значения коэффициентов по формуле (5):

$$A = c_{11} - 2c_{12} + c_{22} = 2 - 2 \cdot 0 + 3 = 5;$$

$$\begin{aligned} B &= -2c_{11}m_2 + 2c_{11}(m_1 + m_2) - 2c_{22}m_1 = \\ &= -2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0(1 + 2) - 2 \cdot 3 \cdot 1 = -14; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= c_{11}m_2^2 - 2c_{11}m_1m_2 + c_{22}m_1^2 = \\ &= 2 \cdot (2)^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot (1)^2 = 11; \end{aligned}$$

$$m_2 - m_1 = 2 - 1 = 1.$$

Тогда

$$V(E) = \alpha_2 E^2 + \alpha_1 E + \alpha_0 = 5E^2 - 14E + 11.$$

Критериальным множеством является парабола с вершиной в точке с координатами (1,4; 1,2). Эффективная граница - правая ветвь параболы. Вершина параболы соответствует портфелю с минимальной вариацией. Вершина параболы с уравнением $ax^2 + bx + c$, $c > 0$, имеет абсциссу $x_{\min} = -b/2a$.

Таким образом, критериальное множество есть парабола:

$$V(E) = 5E^2 - 14E + 11 \tag{7}$$

эффективная граница множества - правая ветвь параболы (7).

Список литературы:

1. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. Пособие для студентов вузов – Москва: Высшая школа, 2004. - 404 с.
2. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3т. Т.1. – М.: Высш. шк., 1988. – 712 с.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3т. Т.2. – М.: Высш. шк., 1989. – 651 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3т. Т.3. – М.: Высш. шк., 1988. – 817 с.