

УДК 539.3

РАСЧЁТ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

*Солоницын А.А., студент гр. СУЗиС-51, V курс
 Научный руководитель: Лоскутов Ю.В., к.т.н., доцент
 ФГБОУ ВО «Поволжский государственный
 технологический университет»
 г. Йошкар-Ола*

Аннотация. Рассчитаем упругую балку по уравнения теории упругости, а после произведем расчет балки согласно законам сопротивления материалов, после чего проведем сравнительный анализ полученных данных.

Ключевые слова: плоская задача ТУ, д/у плоской задачи ТУ.

Как нам известно из курса Сопротивления материалов, нагружая элементы конструкции материал испытывает деформации растяжения или сжатия. При этом стоит помнить, что помимо деформаций растяжения или сжатия материал подвергается деформациям сдвига. На теории пространственные задачи теории упругости сводятся к решению сложных д/у в частных производных. Но вводя в задачу некоторые допущения основная система уравнений значительно упрощается. Данный класс задач получил название –плоская задача теории упругости.

На примере условно взятой балки-пластинки, находящейся в условиях плоской задачи, рассмотрим принцип расчета напряженного состояния. После чего построим графики напряжений по сечению m-n (график σ_x и τ_{xy}). Пусть внутренние напряжения заданы функциями:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0 + f_1(y) + x \cdot f_2(y) \\ \sigma_y &= f_3(y) + x \cdot f_4(y) \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^0 + f_5(y) \end{aligned} \quad (1)$$

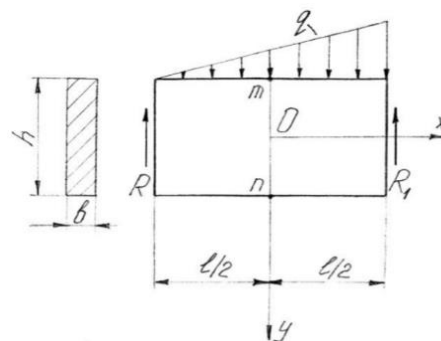


Рис. 1 Расчетная балка

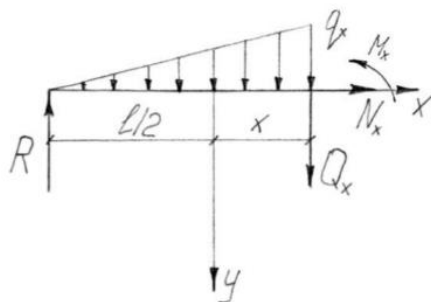


Рис. 2 Расчетная схема

Для решения данной задачи, сначала необходимо посчитать реакции опор, после чего разрезаем нашу балку и составляем уравнения равновесия, из которых находим уравнения для M_x и Q_x .

$$M_x = \frac{q \cdot l}{6} \cdot \left(\frac{l}{2} + x\right) - \frac{q \cdot \left(\frac{l}{2} + x\right)^3}{6 \cdot l}; Q_x = -\frac{q \cdot (12 \cdot x^2 + 12 \cdot l \cdot x - l^2)}{24 \cdot l}$$

Далее находим значение статического момента сечения $S_z^{омсеч.} = A_{омсеч.} \cdot y_C$; По формулам сопротивления материалов, вычисляем σ_x^0, τ_{xy}^0 и полученные выражения подставляем в (1), в результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{2 \cdot q}{b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{l^2}{2} + x \cdot l - \frac{\left(\frac{l}{2} + x\right)^3}{l} \right) \cdot y + f_1(y) + x \cdot f_2(y) \\ \sigma_y = f_3(y) + x \cdot f_4(y) \\ \tau_{xy} = \frac{q}{4 \cdot b \cdot h^3 \cdot l} \cdot (l^2 - 12 \cdot x^2 - 12 \cdot x \cdot l) \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + f_5(y) \end{array} \right.$$

После этого, воспользуемся дифференциальными уравнениями плоской задачи теории упругости

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{q}{2 \cdot b \cdot h^3 \cdot l} \cdot (l^2 - 12 \cdot x^2 - 12 \cdot x \cdot l) + f_2'(y) - \frac{q}{2 \cdot b \cdot h^3 \cdot l} \cdot (l^2 - 12 \cdot x^2 - 12 \cdot x \cdot l) \cdot y + f_5'(y) = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{3q}{b \cdot h^3 \cdot l} \cdot (l + 2 \cdot x) \cdot \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) + f_3'(y) + x f_4'(y) = 0 \\ \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \Rightarrow -\frac{6 \cdot q}{b \cdot h^3 \cdot l} \cdot (l + 2 \cdot x) \cdot y + f_1'(y) + x \cdot f_2''(y) + f_3''(y) + x \cdot f_4''(y) = 0 \end{array} \right.$$

Далее вычисляем неизвестные слагаемые. После чего, используя граничные условия (на верхней и нижней гранях), находим неизвестные коэффициенты.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{h}{2} \Rightarrow \sigma_y = 0; \tau_{xy} = 0 \\ y = -\frac{h}{2} \Rightarrow \sigma_y = -\frac{qx}{bl}; \tau_{xy} = 0 \end{array} \right.$$

После все подстановок окончательное вид уравнений примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{2q}{b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{l^2}{2} + x \cdot l - \frac{\left(\frac{l}{2} + x\right)^3}{l} \right) \cdot y + \frac{2 \cdot q}{b \cdot h^3} \cdot y^3 - \frac{3}{10} \cdot \frac{q}{b \cdot h} \cdot y + x \cdot \left(\frac{4 \cdot q}{b \cdot h^3 \cdot l} \cdot y^3 - \frac{3}{5} \cdot \frac{q}{b \cdot h \cdot l} \cdot y \right) \\ \sigma_y = \frac{3 \cdot q}{b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot y - \frac{y^3}{3} \right) + x \cdot \left(\frac{6 \cdot q}{b \cdot h^3 \cdot l} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot y - \frac{y^3}{3} \right) - \frac{q}{2 \cdot b \cdot l} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{q}{4 \cdot b \cdot h^3 \cdot l} \cdot \left(l^2 - 12 \cdot x^2 - 12 \cdot l \cdot x \right) \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) - \frac{q}{b \cdot h^3 \cdot l} \cdot y^4 + \frac{3}{5} \cdot \frac{q}{b \cdot h \cdot l} \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{1}{80} \cdot \frac{q \cdot h}{b \cdot l} \end{array} \right.$$

Исходя из полученных уравнений, построим эпюры σ_x и τ_{xy} для сечений m-n ($l=h$, $x=0$):

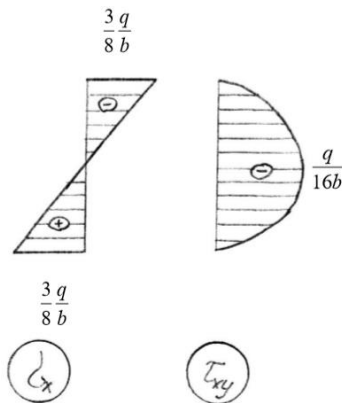


Рис. 3 Эпюры по Сопротивлению материалов

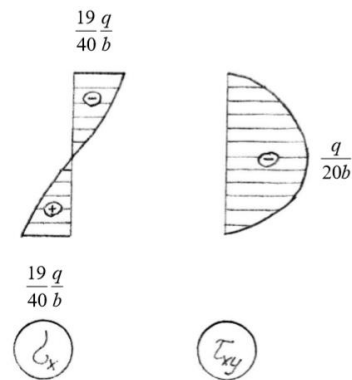


Рис. 4 Эпюры по Теории упругости

Из результатов расчета следует:

Расчет балки-пластины с помощью методов теории упругости является более громоздким и сложным в подсчетах, но при этом, этот метод очень точно характеризует пластические и упругие свойства материала и численно более точно отражает внутренние напряжения.

Список литературы:

1. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности: учебное пособие для студентов вузов / 2-е изд, 1982. – 264 с.
2. Куликов Ю.А. Сопротивление материалов. Курс лекций: учебное пособие для студентов вузов. / Специальная литература / 2017. – 272 с.