УДК 514.7

МНОГОГРАННИКИ. ПЯТЬ ПЛАТОНОВЫХ ТЕЛ

Чередниченко А. В., старший преподаватель
Аронов А. А., студент группы ЭЛб-161, I курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева
г. Кемерово

Для философии Платона характерны правильные, в честь которого и получили название «платоновы тела». Платон писал о них в своём трактате Тимей (360г до н. э.), где сопоставил каждую из четырёх стихий (землю, воздух, воду и огонь) определённому правильному многограннику. Земля сопоставлялась кубу, воздух — октаэдру, вода — икосаэдру, а огонь — тетраэдру. Для возникновения данных ассоциаций были следующие причины: жар огня ощущается чётко и остро (как маленькие тетраэдры); воздух состоит из октаэдров: его мельчайшие компоненты настолько гладкие, что их с трудом можно почувствовать; вода выливается, если её взять в руку, как будто она сделана из множества маленьких шариков (к которым ближе всего икосаэдры); в противоположность воде, совершенно непохожие на шар кубики составляют землю, что служит причиной тому, что земля рассыпается в руках, в противоположность плавному току воды. По поводу пятого элемента, додекаэдра, Платон сделал смутное замечание: «…его бог определил для Вселенной и прибегнул к нему в качестве образца» [1].

Правильный многогранник – это выпуклый многогранник, в котором все грани представляют собой правильные многоугольники, и в любой вершине сходится одинаковое число ребер [2].

В таблице 1 приведены основные данные об этих телах.

	Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
Число граней	4 треугольника	6 квадратов	8 треугольников	12 пятиугольников	20 треугольников
Число вершин	4	8	6	20	12
Число ребер	6	12	12	30	30
Двугранный угол	70°32′	90°	109°28′	116°34′	138°11′

Таблица 1. Основные данные правильных многогранников.

Любопытно, что если построить многогранники, двойственные правильным, то мы получим тот же самый набор многогранников, правда другого размера: соединив центры граней тетраэдра, мы получим тетраэдр, соединив центры граней куба – октаэдр, центры граней октаэдра – куб. Из-за идеального расположения граней этих многогранников всегда будет существовать сфера, проходящая через все их вершины, другая сфера, касающаяся всех граней, и третья, которая будет касаться всех их ребер [2].

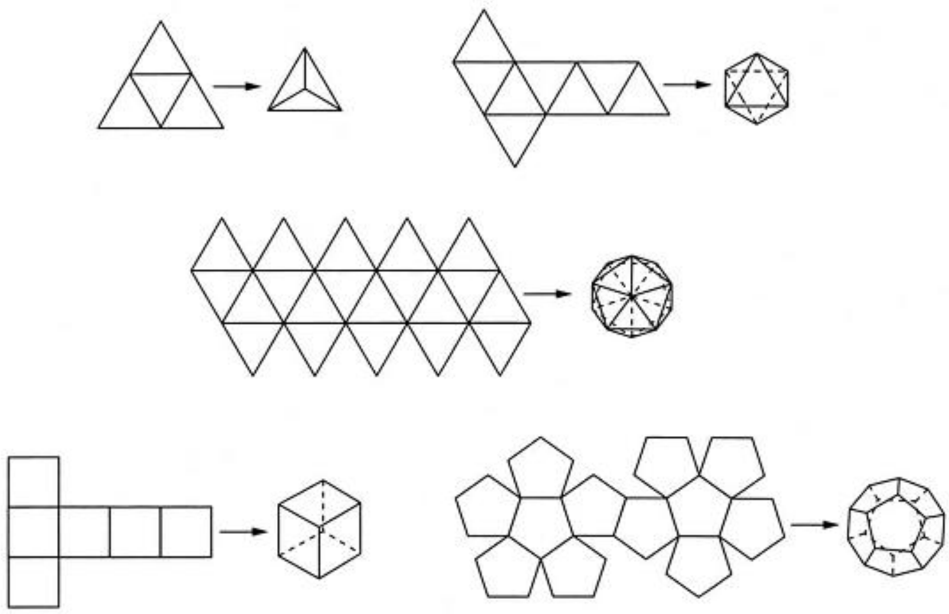

Рис. 1. Развертки правильных многогранников

Почему правильных многогранников всего пять? Существует ли другие? Нет, других не существует. Если m правильных n-угольников должны сходится в одной вершине, то, поскольку углы этих многогранников будут равны $180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = 180^\circ(n-2)$, должно выполняться неравенство $m \times 180^\circ(n-2) < 360$, откуда имеем неравенство $(m-2)(n-2) < 4$. Его возможные решения представлены в таблице 2 [2].

m	*n*	Фигура
3	3	Тетраэдр
3	4	Куб
4	3	Октаэдр
3	5	Додекаэдр
5	3	Икосаэдр

Таблица 2. Решения неравенства.

Таким образом, подходящими многоугольниками являются только равносторонний треугольник, квадрат и правильный пятиугольник, откуда, следует, что существует всего пять правильных многогранников [2].

Многогранник	Площадь поверхности	Объем
Тетраэдр	$S = a^2\sqrt{3}$	$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Куб	$S = 6a^2$	$V = a^3$
Октаэдр	$S = 2\sqrt{3}a^2$	$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
Додекаэдр	$S = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$V = \frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$
Икосаэдр	$S = 5\sqrt{3}a^2$	$V = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3$

Таблица 3. Площади и объемы правильных многогранников.

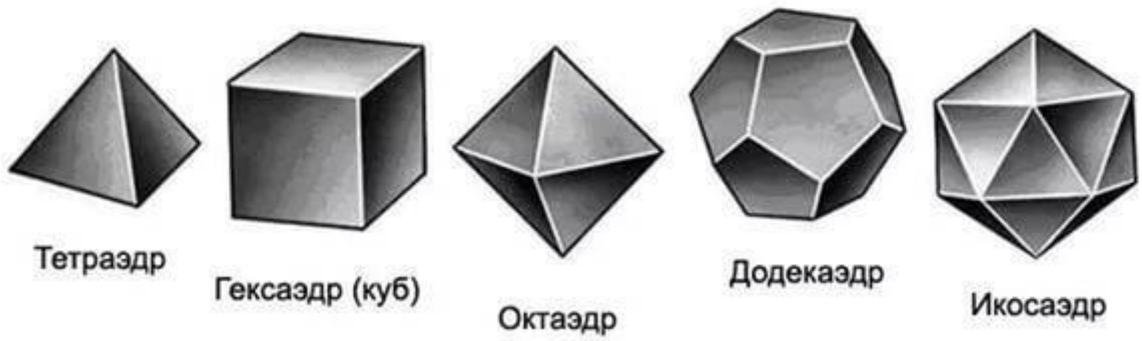

Рис. 2. Пять платоновых тел

Тетраэдр

Тетраэдр – это простейший из правильных многогранников (стихия Огня у Платона), противоположные ребра которого скрещиваются в пространстве перпендикулярно друг другу (под углом 90°). Его геометрический центр находится на пересечении четырех его высот и отстоит от оснований высот на расстояние, равное четверти высоты. В то же время геометрический центр тетраэдра – это середина отрезка, соединяющих середины двух противоположных ребер. Тетраэдр является трехмерным аналогом плоского правильного треугольника (имеет наименьшее число сторон среди правильных многоугольников) и имеет наименьшее число граней. Четыре грани тетраэдра являются равносторонними треугольниками. Четыре – это наименьшее число граней, отделяющих часть трехмерного пространства. Любая его вершина служит вершиной для трех треугольников. Между собой все многогранные углы тетраэдра равны. Итак, тетраэдр содержит 4 грани, 6 ребер и 4 вершины.

Октаэдр

Октаэдр состоит из восьми равносторонних треугольников. (Стихия Воздуха у Платона). «Воздух» в физике можно сопоставить газообразному состоянию вещества. Любая вершина октаэдра служит вершиной для четырех треугольников. Октаэдр можно представить как две правильные четырех-угольные пирамиды, соединенные основаниями (то есть как бипирамиду), либо как два треугольника, расположенных параллельно, между которыми вставлены треугольные грани. Итак, октаэдр содержит 8 граней, 12 ребер и 6 вершин.

Икосаэдр

Двенадцать вершин трех равных многоугольников определяют выпуклый многогранник с треугольными гранями – икосаэдр. (Стихия Воды у Платона). В физике «воду» можно сопоставить жидкому состоянию вещества. Икосаэдр составлен из двадцати равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной пяти треугольников. Итак, икосаэдр содержит 20 граней, 30 ребер и 12 вершин.

Гексаэдр

Куб или гексаэдр состоит из шести квадратов. (Стихия Земли у Платона). В физике «земля» можно сопоставить твердому состоянию вещества. Любая его вершина является вершиной для трех квадратов. Длины диагоналей граней куба единичной стороны равны $\sqrt{2}$, а длина главной диагонали $\sqrt{3}$. Среди сечений куба выделяются равносторонние треугольники и удивительный правильный треугольник, делящий куб на две равные части. Итак, куб содержит 6 граней, 12 ребер и 8 вершин.

Додекаэдр

Додекаэдр состоит из двенадцати равносторонних пятиугольников. (Соответствует пятому элементу – Эфиру). Любая его вершина является вершиной трех пятиугольников. Итак, додекаэдр содержит 12 граней, 20 вершин и 30ребер.

Список литературы:

1. Платоновы тела. [Текст], [электронный ресурс] - https://rutlib.com/book/6457/p/87
2. Альсин, К. Тысяча граней геометрической красоты. Многогранники [Текст] / К. Альсин // Мир математики. – 2014. – №23. – С. 45-53.