

УДК 51

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛА «СЧАСТЛИВЫХ БИЛЕТОВ»

Грибков В.И., старший преподаватель
Филиппов С.С., студент гр. ИТб–152, II курс
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева
г. Кемерово

Наверняка, почти каждый человек хотя бы раз в жизни получал «счастливый» билет в общественном транспорте. Можно сказать, что «счастливый» билет является как бы залогом успеха на предстоящий день. Он повышает настроение, настраивает на нужный лад. Даже самый заядлый скептик обязательно улыбнется, заполучив такую удачу. Так что же эта за волшебная вещь? «Счастливый» билет – это билет, полученный в общественном транспорте, состоящий из шести чисел-цифр. Сумма первых трех его чисел совпадает с суммой трех последних. Общее число шестизначных номеров, порождающих «счастливые» билеты, равно 55252 (см. [1, 2]), это 5,5% из общего множества, то есть в среднем, примерно, один билет из восемнадцати будет счастливым. А что если билет будет из восьми, двадцати или даже сотни чисел? Сразу становится понятно, что перебор значений вручную займет очень много времени. Даже компьютер, не способен за короткий срок, справиться с этой трудоемкой работой. В данной работе добавлен ещё один параметр – основание системы счисления. Обычно эта задача решалась только в десятичной системе.

В учебнике (см. [3]) есть экзотическая формула этого числа $L = L(n, c)$ для любой длины $(2n)$ и системы счисления (c) :

$$L = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin cx}{\sin x} \right)^{2n} dx$$

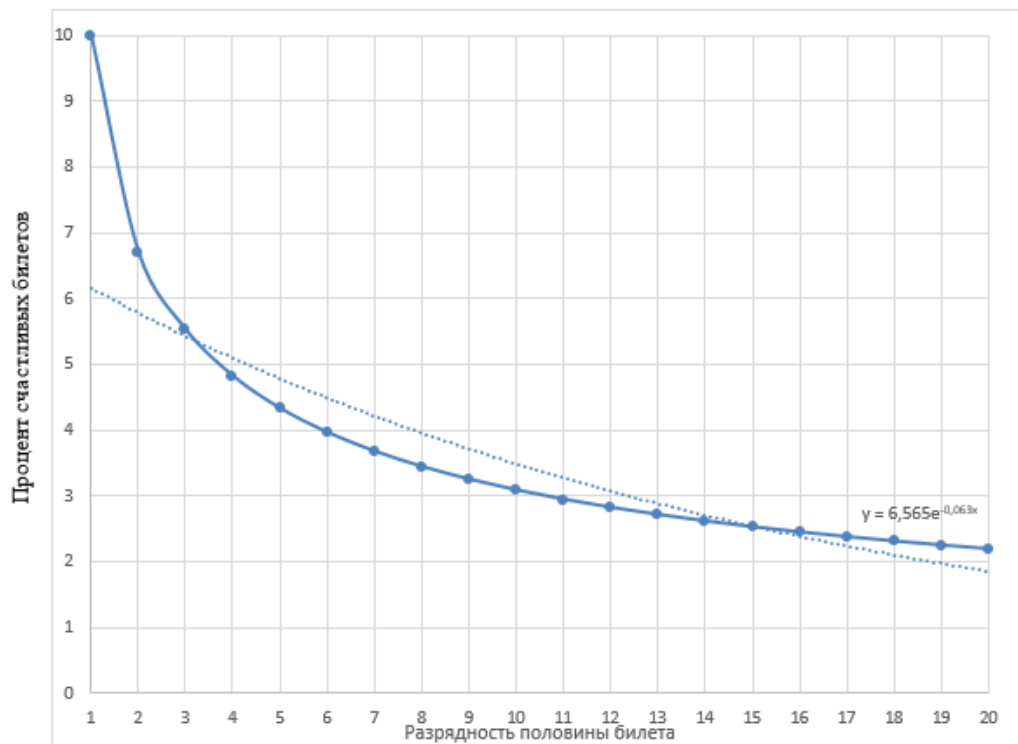
При значениях $c = 10$ и $2n = 20$ этот интеграл методом парабол (Симпсона) считается на обычном ноутбуке несколько часов! Это очень долго.

В данной работе за основу была взята *рекуррентная* формула (для десятичной системы счисления), по которой счёт проходит за секунды (по всем n и k):

$$N_n(k) = \sum_{l=0}^9 N_{n-1}(k-l)$$

где n – половина длины «билета», k – сумма цифр этой половины, а $N_n(k)$ – число чисел с такой суммой. Итоговое число L находится суммированием квадратов этих чисел ($N_n^2(k)$) по всем k от 0 до n -с.

С помощью этой нехитрой формулы, легко получаемой простыми комбинаторными рассуждениями, и таблицы составленной по ней, можно посчитать «счастливые билеты» для любых $2n$ -значных номеров и определить их процент от общего количества. Чтобы не считать огромные числа вручную, были написаны незаурядные программы на языках C# и Python, которые в кратчайшие сроки (доли секунды) посчитали наши заветные числа. Длины чисел были взяты от 2 ($n=1$) до 40 ($n=20$). Изменение процента счастливых билетов (pL) от полудлины билета (n) можно видеть на графике, приведённом ниже.



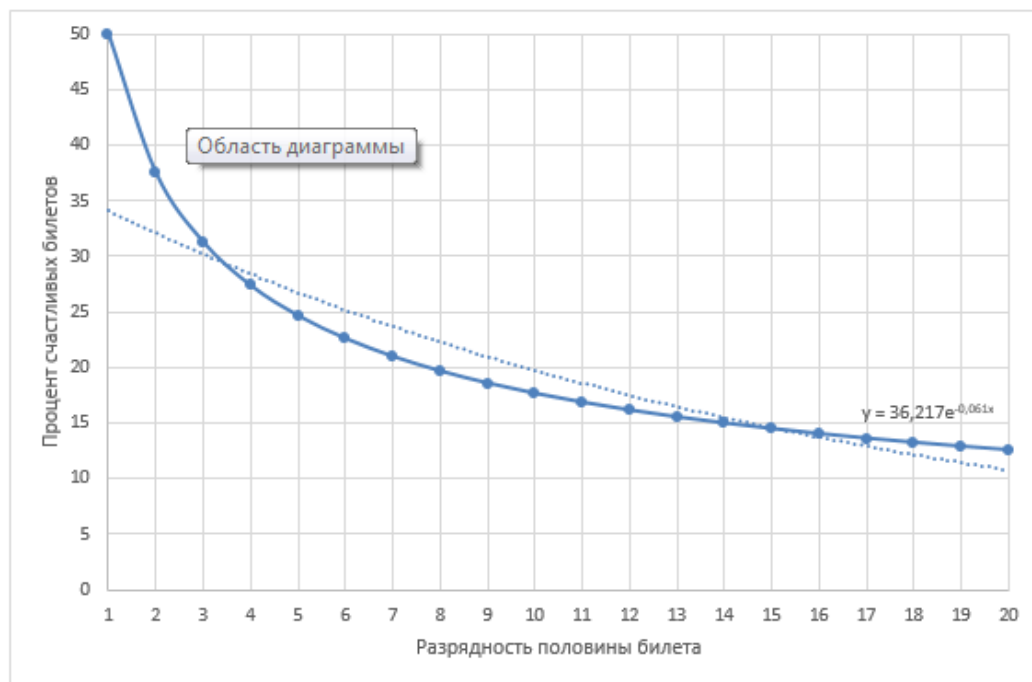
Можно заметить, что чем меньше разрядность билета, тем больше процент счастливых билетов. Так же из графика видно, что кривая изменяется примерно по экспоненциальному закону. Используя метод подгонки, была получена следующая зависимость: $y = 6,565e^{-0,063x}$. Для большей наглядности приведём полученные значения чисел и процента десятичных «счастливых билетов» в табличной форме.

n – половина разрядов числа	N - общее число билетов	L - количество счастливых билетов	pL - %-процент счастливых билетов
1	$100=10^2$	10	10
2	10^4	670	6,7
3	10^6	55252	5,525

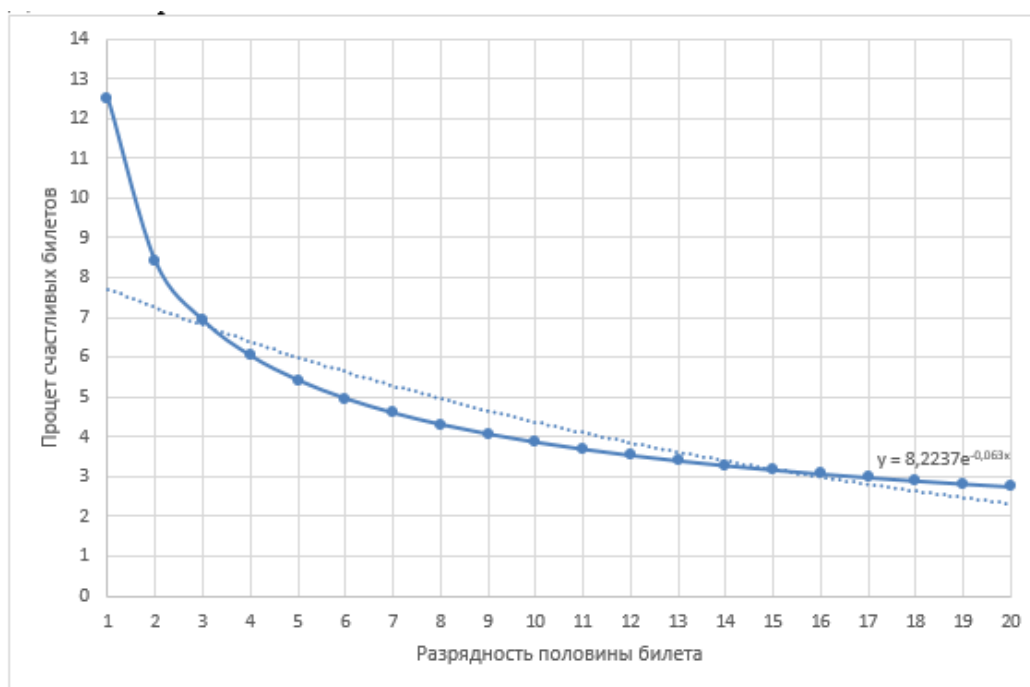
4	10^8	4816030	4,816
5	10^{10}	$4,325 \cdot 10^8$	4,325
6	10^{12}	$3,958 \cdot 10^{10}$	3,958
7	10^{14}	$3,671 \cdot 10^{12}$	3,671
8	10^{16}	$3,439 \cdot 10^{14}$	3,439
9	10^{18}	$3,246 \cdot 10^{16}$	3,246
10	10^{20}	$3,082 \cdot 10^{18}$	3,082
11	10^{22}	$2,942 \cdot 10^{20}$	2,942
12	10^{24}	$2,817 \cdot 10^{22}$	2,817
13	10^{26}	$2,706 \cdot 10^{24}$	2,706
14	10^{28}	$2,610 \cdot 10^{26}$	2,610
15	10^{30}	$2,523 \cdot 10^{28}$	2,523
16	10^{32}	$2,444 \cdot 10^{30}$	2,444
17	10^{34}	$2,371 \cdot 10^{32}$	2,371
18	10^{36}	$2,305 \cdot 10^{34}$	2,305
19	10^{38}	$2,244 \cdot 10^{36}$	2,244
20	10^{40}	$2,188 \cdot 10^{38}$	2,188

А что будет, если представить наши счастливые билеты в другой системе счисления? Будут ли они соответствовать графику в десятичной системе счисления? Возьмем для примера двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления. С одинаковой разрядностью половины билета от 1 до 20. Программа выдала следующие результаты, представленные ниже в виде графиков.

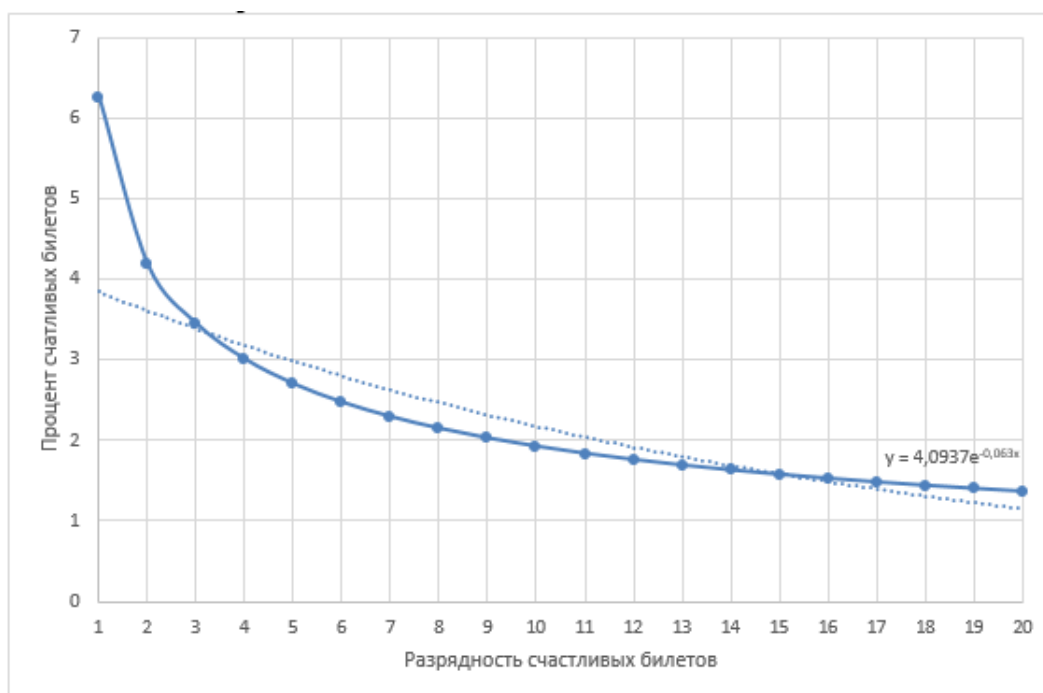
Для двоичной системы счисления:



Для восьмеричной системы счисления:



Для шестнадцатеричной системы счисления:



Все графики в разных системах счисления по своей форме похожи. Из этого можно сделать вывод, что при увеличении разрядности системы счисления процент счастливых билетов снижается и чем больше разрядность системы, тем быстрее уменьшается процент. Так же можно заметить, что процент счастливых билетов уменьшается при одной и той же длине билета в

разных системах счисления. Как он изменяется показывает график, где длины билета фиксированы значением $2n = 20$.

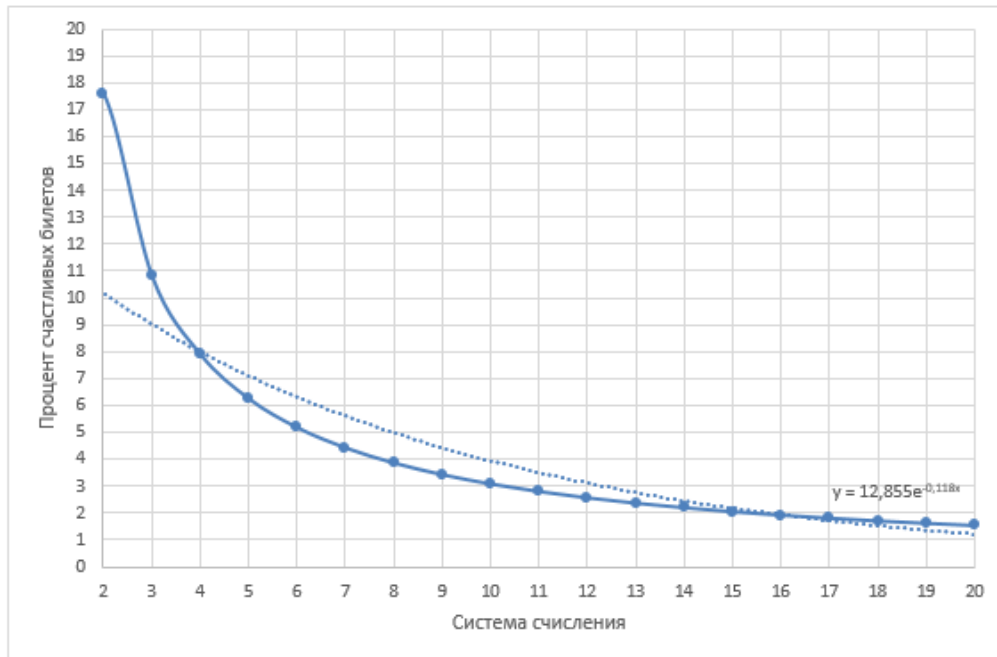


График изменяется по экспоненциальному закону $y = 12,855e^{-0,118x}$.

Видно, что все полученные зависимости изменяются примерно по экспоненциальному закону, это означает что с увеличением длины билета количество счастливых билетов уменьшается, но дойдя до определенного момента уменьшение становится все меньше.

В дальнейшем предполагается исследовать данный предмет в направлении получения точного выражения для данного числа комбинаторными методами.

Список литературы:

1. Зумер Александр Счастливые билетки до 300 цифр // Хабрахабр, 2006–2017 гг.: электрон. дан. Режим доступа URL: <https://habrahabr.ru/post/266479/> (дата обращения 01.03.2017)
2. Финк Л.М. Ещё раз о счастливых билетах // Математика, интересна для меня: электрон. дан. Режим доступа URL: <http://www.ega-math.narod.ru/Quant/Tickets.htm> (дата обращения 01.03.2017)
3. Вся высшая математика: Учебник. Т.7. / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко и др. М.: КомКнига, 2006. 208 с.