

УДК 531.001.362

**ЗАКОНЫ МАСШТАБИРОВАНИЯ В ЖИВОЙ И НЕЖИВОЙ ПРИРОДЕ**

Королева Е.А., Елисеева А.В., студ. гр. УЗс-161, I-курс СИ КузГТУ

Научный руководитель: Смирнов В.Г., к.ф.-м.н.

Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева  
г. Кемерово 2017

Прекрасны и многообразны творения живой природы. Но в настоящее время объекты, созданные человеческими руками, могут сравниться по широте применения и диапазону размеров с разнообразием живой природы. Еще в XV веке итальянского ученого и художника Леонардо да Винчи заинтересовала тема пропорциональности. Как человек, пишущий картины, он должен был хорошо знать человеческие пропорции, точно передавать образы для достижения реалистичности полотен. Пытливый ум, требовал обоснования с научной точки зрения, выявления закономерностей, установления связей. «Пропорция обретается не только в числах и мерах, но также в звуках, тяжестях, временах и положениях и в любой силе, какая бы она ни была» – писал он в своих заметках. Им были затронуты пропорции человека взрослого и ребенка, животных в движении и покое, а так же растений. Основной мерой творец считал дину и массу. Именно эта зависимость массы тел от их длины вызывает и наш интерес.

В процессе длительной эволюции природа наделила идеальными пропорциями тела и маленькую мышь и быстрого волка и огромного слона. Идеальными пропорциями животных можно назвать именно те пропорции тела, ног и других частей, которые позволяют каждому виду успешно существовать в окружающей среде, находить пропитание, общаться с сородичами и оставлять потомство. Это важно и для мышей и для волков и для слонов. Однако невозможно линейно увеличивая все размеры мыши превратить ее в слона, из-за того, что отдельные пропорции частей тел совершенно различны у мелких и крупных животных. Например, отношение диаметра ног к размеру тела у слона несоизмеримо больше, чем у мыши, чьи ноги выглядят совсем тонкими даже на фоне маленького размера тела. При этом мышь способна прыгать на высоту, десятикратно превышающую ее рост, а слон совсем не способен подпрыгнуть. Возникает вопрос, существует ли закономерность между массой и размером тела, присущая для всех животных.

Разрабатываемые человеком объекты, например автомобили, предназначены для выполнения вполне конкретных функций, а их размеры и пропорции диктуются законами упругости и прочности, а также свойствами материалов, доступных для изготовления автомобилей. Существуют автомобили больших и малых размеров, при увеличении размеров увеличивается масса автомобиля. С учетом того, что во всем мире десятки независимых производителей автомобилей, находящихся в условиях

серьезной конкуренции, и, поэтому вынужденные оптимизировать конструкцию своих моделей, можно ожидать, что конструкция выпускаемых автомобилей подчиняется некоторым общим закономерностям, основанных на физических законах.

Чтобы пояснить основную задачу нашего исследования, рассмотрим сначала несколько простых примеров. Если тело имеет постоянную форму, например сфера, куб, цилиндр и т.п. то при увеличении всех его размеров в определенное число раз, площадь поверхности тела меняется пропорционально квадрату данного числа, а объем пропорционально кубу данного числа. Если постоянна плотность вещества, из которого изготовлено тело, то и масса тела растет пропорционально кубу линейных размеров. Обозначив линейные размеры  $L$ , площадь поверхности  $S$ , массу тела  $M$ , а число, в которое увеличиваются размеры, как  $f$ , то можно записать следующие соотношения:  $L' = fL$ ,  $S' = f^2 S$ ,  $M' = f^3 M$ . В последнем выражении штрихами обозначено новое значение каждой величины. Запишем также  $f = L'/L$  или  $M' = (L'/L)^3 M = A \cdot (L')^3$ , где  $A$  – некоторая константа. Далее одним и тем же символом « $A$ » мы будем обозначать константы, не зависящие от исследуемых нами величин, эти константы в разных формулах имеют разное значение и смысл. В общем случае связь между величинами, характеризующими масштаб тела, можно записать в следующем виде:

$$Y = A \cdot X^\alpha \quad (1)$$

Где  $Y$ ,  $X$  – любые величины характеризующие масштаб или размеры тела, это может быть длина тела, площадь его поверхности, масса и т.д., а  $\alpha$  – показатель степени, характеризующий взаимную связь этих величин. На первый взгляд, может показаться, что для любых тел масса зависит от его линейных размеров кубически, т.е. показатель степени в формуле (1)  $\alpha = 3$ , если  $X$  – длина тела, а  $Y$  – его масса. Однако это не всегда так, например, если мы рассматриваем плоское тело, пусть это будет выпеченный блин постоянной толщины, то его масса будет квадратично ( $\alpha = 2$ ) зависеть от радиуса. Если рассмотреть воздушный шар, надутый до определенного давления, то его масса, на первый взгляд, напрямую зависит от площади поверхности. Однако, законы масштабирования требуют, что сила, которую должна выдерживать оболочка, с увеличением размеров также должна увеличиваться. Сила зависит от произведения давления и площади, и поэтому воздушный шар с увеличением размеров «должен» также и увеличивать толщину оболочки, для того, чтобы выполнять свое предназначение. Во многих случаях связь между величинами, характеризующими масштабы тел, может описываться нецелыми показателями степени  $\alpha$ .

Рассмотрим в качестве простейшего механизма балку квадратного сечения, стороной  $b$ , лежащую на двух опорах, находящихся на удалении  $L$  друг от друга. Предназначение балки выдерживать постоянную нагрузку  $G$  прогибаясь не более чем на величину  $\lambda$  – стрела прогиба балки. Пусть  $E$  – модуль Юнга вещества, из которого изготовлена балка. Тогда, основываясь на

законах механики, можно записать формулу:  $\lambda = \frac{GL^3}{4Eb^4}$ , описывающую прогиб

балки. При фиксированной стреле прогиба и постоянной величине нагрузки можно сопоставить между собой рост толщины балки и ее длины следующим образом:  $b = A \cdot L^{0.75}$ . Массу балки можно выразить через ее плотность и объем:  $M = \rho b^2 L = A \cdot L^{2.5}$ . Таким образом, масса будет зависеть от длины балки не квадратично и не кубически. Во всех формулах «А» – некоторая (каждый раз разная) константа, не зависящая от исследуемых величин.

Рассмотрим еще один пример. Квадратная балка, длиной  $L$ , площадью сечения  $b^2$ , закрепленная одним концом, прогибается под действием собственного веса  $G = \rho b^2 L g$ , где  $g$  – ускорение свободного падения. Стрела

прогиба незакрепленного конца балки:  $\lambda = \frac{3\rho b^2 L g L^3}{Eb^4} = \frac{3\rho g L^4}{Eb^2}$ . В отличие от

предыдущего примера, предположим, что с увеличением длины и толщины допускается также и увеличение стрелы прогиба балки, так что  $\lambda = b$ . В этом случае  $b = A \cdot L^{1.33}$ . Так что если мы желаем, чтобы балка выполняла свою функцию, ее толщина должна расти темпами, опережающими рост длины. При таком подходе масса балки будет возрастать с увеличением ее длины следующим образом:  $M = A \cdot L^{3.67}$ . Получаем еще одну дробную зависимость между массой тела и его длиной.

Приведенные примеры являются упрощенными моделями. Реальные природные объекты и творения человеческих рук и мыслей существенно сложнее и интересней. Для наглядности сложных законов масштабирования мира живой и неживой природы мы использовали один из методов линеаризации: метод логарифмирования. Логарифмирование очень удобно при сравнении объектов, массы которых отличаются на многие порядки, например, если масса слона больше массы мыши в несколько сотен тысяч раз, то на шкале натурального логарифма различие этих величин будет порядка десяти единиц.

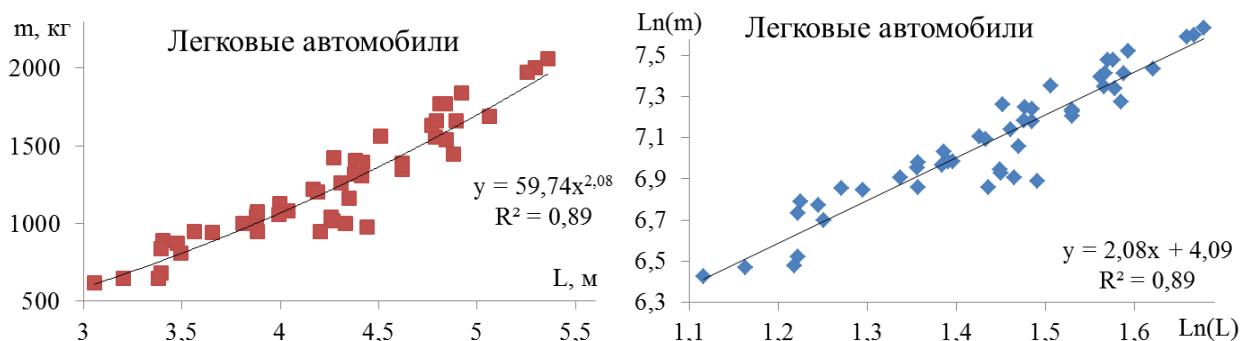


Рис. 1. Связь массы и длины легковых автомобилей.

Мы применили логарифмирование для выявления зависимости между массой объектов и их размерами, например, длиной. Действительно, логарифмируя формулу (1) получим:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \cdot \ln X \quad (2)$$

Если взять группу однотипных объектов разных размеров, можно построить зависимость логарифма массы объекта от логарифма его длины и по наклону линии тренда установить показатель степени  $\alpha$ , который выражает связь массы тел и их длины.

Нами сопоставлены (рис. 1) длина и масса около пятидесяти случайно выбранных моделей отечественных и импортных легковых автомобилей разного размера от Оки и Тойоты Ярис, включая машины Лада и популярные иномарки Форд Фокус, Киа Сид, и др., до больших машин типа Ауди А8 и Мерседес. Из рассмотрения исключены бронированные машины и внедорожники. На рис. 1 показана данная зависимость в линейных и логарифмических координатах. Видно, что все модели машин подчиняются общей закономерности, отражающей почти квадратичную зависимость массы автомобиля от ее длины:  $m = A \cdot L^{2.08}$ . Так что, в среднем, при увеличении длины машины на 10% ее масса должна увеличиться примерно на 20%. Полученная зависимость характеризуется высоким коэффициентом достоверности аппроксимации. Группа машин, массой около 1000 кг и длиной примерно 4.3 метра, которая отклоняется вниз от проведенной линии тренда – это машины семейства Лада Самара и Приора.

Были исследованы также соотношения между массой и длиной тела у животных и рыб. Для рассмотрения (рис. 2) выбрано около 50 видов сухопутных теплокровных животных в масштабе масс от десятков грамм до нескольких тонн, а также около двух десятков рыб разных размеров: от ерша до белой акулы. Вес тела измерялся в килограммах, длина в метрах, так что отрицательные значения на логарифмической шкале (рис. 2) соответствуют объектам длиной менее одного метра, либо массой тела менее одного килограмма.

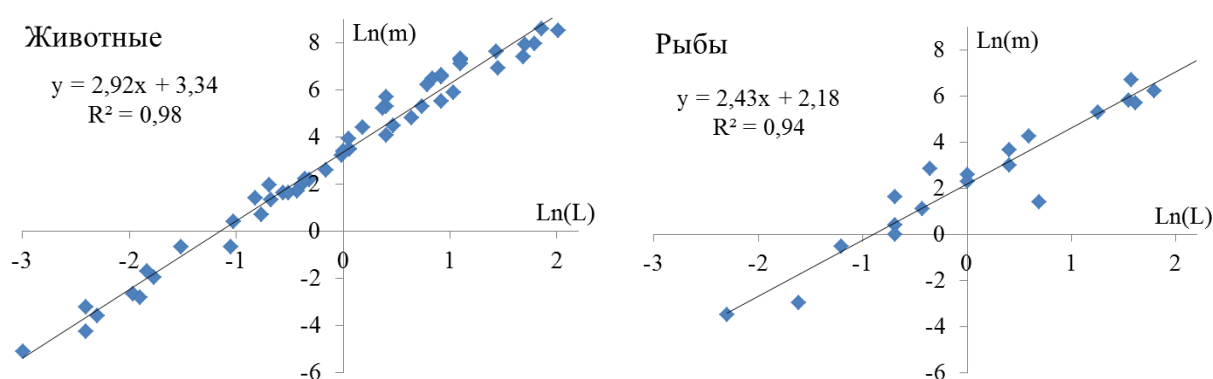


Рис. 2. Связь логарифма массы и логарифма длины тела у животных и рыб.

В обоих случаях наблюдается отчетливая зависимость массы тела животных и рыб от их длины, с высоким коэффициентом достоверности аппроксимации. Масса сухопутных животных связана с их длиной по формуле  $m = A \cdot L^{2.92}$ , т.е. растет практически по кубическому закону, как и происходит у трехмерных объектов, увеличивающихся одинаково во все

стороны. Но связь между массой и длиной рыб выражается уже формулой  $m = A \cdot L^{2.43}$ , где показатель степени  $\alpha = 2.43$  меньше 3х, что отражается «вытянутостью» формы тела у рыб. Особенно вытянутостью формы тела обладают мойва и угорь, для которых характерные точки (рис. 2) больше всего отклоняются вниз от линии тренда. Исходя из наших расчетов видно, длина тела рыб растет несколько быстрее длины тела животных при одной и той же массе. Такое различие можно объяснить законами гидродинамики, которые определяют эволюцию формы тела у рыб. Известно, что перемещаться в плотной водной среде проще всего телам, имеющим вытянутую форму, что, вероятнее всего, и повлияло на эволюцию рыб.

#### Литература и источники:

1. Михайлов Б. П., Леонардо да Винчи, архитектор. – М.: Изд-во Рипол Классик, 2013. – 79 стр.
2. Сивухин Д. В., Общий курс физики. В 5т. Т. I. Механика. –М.: Изд-во Физматлит, 2006. – 560 с.
3. Википедия Свободная энциклопедия: <https://ru.wikipedia.org>
4. Энциклопедия животных: <http://www.animalsglobe.ru/>
5. Размеры полный справочник: <http://razmery.info/>
6. <http://ribovodstvo.com/books/item/f00/s00/z00000000/st039.shtml>