УДК 510.2:510.6(072)

ОБ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ГЕНЕРАЦИИ ЗАДАЧ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНЛУКЦИИ»

А.В.Покидова, студент гр. ПИ-14, II курс
Научный руководитель: Л.В. Гаев, к.т.н., доцент
Липецкий государственный технический университет
г. Липецк

Современное состояние производства предполагает повсеместное использование средств вычислительной техники на всех этапах жизненного цикла продукции. При этом практически все используемые компьютеры являются цифровыми устройствами, ориентированными на обработку дискретной информации. Производство значительной доли продукции также представляет собой дискретный процесс. Поэтому естественной представляется тенденция все более широкого использования разнообразных дискретных моделей, предназначенных для управления. Дискретная математика занимается изучением финитных (конечных) свойств объектов, которые возникают как в различных разделах математики, так и в ее технических приложениях. В настоящее время методы дискретной математики находят широкое применение в различных областях знаний, наиболее значимой из которых является область компьютерных технологий. Это ставит перед высшими учебными заведениями задачу широкого внедрения в учебный процесс методов изучения и анализа объектов и событий, описываемых в терминах дискретной математики. Эти тенденции в настоящее время прослеживаются во многих разделах математики, изучаемых в высшей школе[1]. Примером могут служить методы моделирования различных социальных и экономических процессов. Знание теории множеств, алгебры, математической логики и теории графов совершенно необходимо для четкой формулировки понятий и постановок различных прикладных задач, их формализации и компьютеризации, а также для усвоения и разработки современных информационных технологий. Данная статья посвящена учебным проблемам, связанным с одним из способов анализа дискретной информации – методом математической индукции.

Метод математической индукции позволяет доказывать свойства соотношений, зависящих от натурального параметра, и основывается на следующей теореме [2]:

Теорема(принцип строгой математической индукции).

Предположим, что для каждого натурального числа $n \geq n_0$ сформулировано утверждение $P(n)$, обладающее следующими свойствами:

1) $P(n_0)$ истинно

2) Если P(n) справедливо при $n = n_0, n_0 + 1, \ldots, k$, то утверждение P(k+1) тоже верно. Тогда для любого натурального $n \geq n_0$ утверждение P(n) истинно.

Традиционно на занятиях, посвященных данной теме, в основном рассматриваются два типа свойств: тождества, касающиеся суммы или произведения конечного количества элементов, и целочисленной делимости некоторого выражения, зависящего от натурального параметра.

Примером первого типа заданий может служить следующий : Доказать, что при любом натуральном n справедливо равенство

$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

Второй тип заданий может проиллюстрировать такой пример:

Доказать, что $5\cdot2^{3n-2}+3^{3n-1}$ при произвольном натуральном n делится на 19 без остатка.

При обучении желательно иметь обширный корпус задач, используя которые можно индивидуализировать занятия со студентами. Особенно случай, с домашнем заданием. Конечно, в сети Интернет в настоящее время можно найти большое количество задач, но при этом также можно найти и готовые решения. Поэтому, встает вопрос о методике создания большого количества различных задач на применения метода математической индукции . В дальнейшем будет рассматриваться проблема автоматизированной генерации задач только второго типа.

Решение может быть найдено путем использования рекуррентных соотношений. Если рассматривать соотношения вида $A_n=f(n, A_{n-1},\ldots,A_{k-1})$, $A_0=a_0,\ldots, A_{k-1}= a_{k-1}$, $n\geq k$, то при целочисленных значениях $a_0,\ldots, a_{k-1}$ мы будем иметь последовательность целых чисел, когда функция f имеет подходящий вид. В случае решения подобного соотношения и записи A_n в замкнутом виде (то есть в форме $A_n=g(n)$, где g(n) – некоторая функция от натурального аргумента), можно рассматривать различные свойства получающегося ряда целых чисел.

В основе рассмотренных ранее алгоритмических приемов накопления суммы и произведения лежит фундаментальная идея о том, что результат вычислений на каждом шаге цикла должен зависеть от результата вычислений на предыдущем шаге. Обобщенным математическим выражением этой идеи являются рекуррентные соотношения. В настоящее время не существует методов решения рекуррентных соотношений произвольного вида. Хорошо разработаны лишь способы решения линейных рекуррентных соотношений (однородных и неоднородных)[3].

Рассмотрим случай решения однородного линейного рекуррентного соотношения. Оно имеет вид суммы

$A_n = c_0 q_0(n) b_0^n + c_1 q_1(n) b_1^n + \ldots + c_{k-1} q_{k-1}(n) b_{k-1}^n$, где

$b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ – константы, зависящие от коэффициентов соотношения, которые всегда можно сделать так, чтобы они были целыми,

$q_0(n), q_1(n), \ldots, q_{k-1}(n)$ - многочлены, которые возможно сделать тождественно равными 1,

$c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ – произвольные постоянные.

Фактически определение значений множителей 0, c1,…, ck-1, представляет собой решение совместной системы k линейный уравнений с k неизвестными. Используя теорему Крамера:Если определитель матрицы квадратной системы не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ - определитель матрицы системы, Δ_i - определитель матрицы системы, где вместо i -го столбца стоит столбец правых частей.

Таким образом, мы может получить выражение вида $A_n = (d_0 b_0^n + d_1 b_1^n + \ldots + d_{k-1} b_{k-1}^n)/\Delta$, где $d_i b_i$ (i=0, 1,…,k-1) – целые числа. Поскольку, согласно рекуррентному определению элементов последовательности A_n, ,все они являются целыми числами, то можно сделать вывод, что для любого n выражение $d_0 b_0^n + d_1 b_1^n + \ldots + d_{k-1} b_{k-1}^n$ представляет собой число, делящееся нацело на число Δ.

Рассмотрим конкретный пример применения описанного подхода. Пусть задано рекуррентное соотношение $A_n = 18 A_{n-1} - 45 A_{n-2}$, $A_0 = 1$, $A_1 = 2$. В этом случае общее решение будет иметь вид $A_n = c_0 3^n + c_1 15^n$. Подставляя начальные значения, получим систему линейных уравнений

$$\begin{Bmatrix} c_0 + c_1 = 1 \\ 3c_0 + 15c_1 = 2 \end{Bmatrix}$$

Определитель $\Delta = 12$, и в итоге частное решение принимает вид $A_n = (13 \cdot 3^n - 15^n)/12$. Поскольку все значения A_n должны быть целыми, получаем, что выражение $13 \cdot 3^n - 15^n$ должно делиться нацело на 12 при любом n .

Получение подобных решений рекуррентных соотношений достаточно легко автоматизируется, что позволяет получать большое количество различных задач для разбора по теме «Метод математической индукции» и составления индивидуальных заданий.

Список литературы

1. Купиллари А. Математика – это просто! Доказательства.- М.: Техносфера, 2006. – 304с.
2. Грэхем Р.Л., Кнут Д.Э., Паташник О. Конкретная математика. Математические основы информатики. – М.:Вильямс, 2015. – 784 с.
3. Кремер Н.Ш., Фридман М.Н. Линейная алгебра.- М.:Юрайт, 2014. – 307с.