

УДК 622.822.2: 622.271: 519.6

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГЕОФИЗИКИ НА ПРИМЕРЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФОРМЫ ИСТОЧНИКА ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

Д.Ю. Сирота, к.т.н. доцент кафедры ТиГМ
Е. О. Попова, студентка гр. ФПс–121, IV курс
Т. А. Мигунова, студентка гр. ФПс–121, IV курс

Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачёва
г. Кемерово

Введение. Разведочная геофизика основана на измерении и последующей интерпретации различных параметров естественных и искусственно создаваемых полей, изменения которых определяются неоднородностью состава, строения, изменчивостью свойств земной коры и происходящими в ней естественными или техногенными процессами. Все указанные задачи разведочной геофизики можно считать диагностическими, поскольку они не обладают прогностической способностью, а только лишь фиксируют текущее значение исследуемых параметров.

С точки зрения прикладной математики различные задачи интерпретации измеренных данных с целью определения электрических или магнитных параметров горных пород, определение слоистости вмещающего пространства, восстановление формы источников потенциальных полей различной природы являются обратными и некорректными [1 – 4]. В настоящее время основным методом решения таких задач является использование регуляризирующего функционала А. Н. Тихонова [1], минимум которого как раз и соответствует решению исходной обратной задачи. В представленной заметке рассматривается диагностическая задача определения формы заглубленного плоского источника потенциального поля по измерениям потенциала на земной поверхности, которая сводится к решению интегрального уравнения Fredholm'a – Урысона 1-го рода. Решаемая задача рассматривалась и ранее, например, в работах [1, 2, 5 – 8], но в более простой постановке.

1. Постановка и решение прямой задачи. Предположим, что поле (в дальнейшем будем рассматривать только электрическое поле (ЭП), но предлагаемый метод применим и для любых потенциальных полей в силу аналогичности используемой математической модели) порождается горизонтальным кругом S_p , который расположен на некоторой глубине $z_M = H$ в нижнем слое двухслойного однородного и изотропного вмещающего пространства (рисунок 1).

Величина потенциала поля такого источника в произвольной точке измерения M на дневной поверхности будет определяться в полярной системе координат по общей формуле

$$U^M = \int_{S_p} u^M dS_p \quad (1)$$

где S_p – плоский источник тока, функция u^M определяется по известной формуле потенциала точечного источника тока [9]

$$u^M = C \int_0^\infty J_0(m \cdot D) \exp(-m z_M) dm = \frac{C}{\sqrt{D^2 + z_M^2}}, \quad (2)$$

в которой $D = \sqrt{(x_M - x_p)^2 + (y_M - y_p)^2}$ – расстояние от точки области интегрирования P до точки измерения поля M , м; C – коэффициент, характеризующий силу электрического тока источника; $J_0(m \cdot D)$ – функция Bessel'я нулевого порядка.

Для интегрирования по произвольной области с замкнутой границей перейдем от декартовой системы координат к полярной по следующим стандартным формулам: $x_p = r \cos \varphi$, $y_p = r \sin \varphi$, где $\varphi \in [0; 2\pi]$ и $r \in [0; \rho(\varphi)]$, при этом функция $\rho(\varphi)$ определяет контур плоского источника тока (в случае круга – это постоянная величина).

Далее преобразуем выражение (2) к произведению размерного и безразмерного сомножителя, сделав замены переменных: во внешнем интеграле $w \cdot h^{-1} = \bar{w}$, где под w подразумеваются все параметры с размерностью [м], $m \cdot h = \bar{m}$ – во внутреннем, а $h = z_M$ – коэффициент приведения. Тогда интеграл (1) примет вид

$$U^M = h \cdot C \int_{S_p} \frac{\bar{r} d\bar{r} d\varphi}{\sqrt{\bar{D}^2 + 1}}, \quad (3)$$

где $\bar{D} = \sqrt{(\bar{x}_M - \bar{r} \cos \varphi)^2 + (\bar{y}_M - \bar{r} \sin \varphi)^2}$.

После преобразований получим расчётную формулу для определения величины потенциала в произвольной точке M (оператор прямого моделирования) на земной поверхности вида

$$U^M = C \cdot h \int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{\rho}(\varphi)} \frac{\bar{r} d\bar{r}}{\sqrt{R}} d\varphi, \quad (4)$$

где $R = \bar{r}^2 + B \cdot \bar{r} + A$, $A = \bar{x}_M^2 + \bar{y}_M^2 + 1$, $B = -2(\bar{x}_M \cos \varphi + \bar{y}_M \sin \varphi)$.

Внутренний интеграл в (4) достаточно легко вычисляется:

$$\int_0^{\bar{\rho}(\varphi)} \frac{\bar{r} d\bar{r}}{\sqrt{R}} = \left(\sqrt{R} - \frac{B}{2} \ln \left| \bar{r} + \frac{B}{2} + \sqrt{R} \right| \right) \Big|_0^{\bar{\rho}(\varphi)} = F(\bar{x}_M, \bar{y}_M, \bar{\rho}(\varphi)). \quad (5)$$

2. Решение обратной задачи. При решении обратной задачи будем предполагать, что известны измерения потенциала поля на земной поверхности вдоль одной из осей координат, то есть $y_M = 0$. Сформируем регуляризующий функционал невязки А. Н. Тихонова [1 - 4]

$$\Phi(\bar{\rho}, \gamma) = \mu(\bar{\rho}) + \alpha\Omega(\bar{\rho}) \quad (6)$$

где $\mu(\bar{\rho}) = \int_a^b [U^M(\bar{x}_M, \bar{\rho}(\varphi)) - U^*(\bar{x}_M, \bar{\rho}^*)]^2 d\bar{x}_M$ – мера погрешности измерения

напряжённости на дневной поверхности; $\Omega(\bar{\rho}) = \int_0^{2\pi} \bar{\rho}^2 d\varphi$ – стабилизирующий функционал; α – параметр регуляризации [1 – 3, 5]; $[a; b]$ – отрезок измерения потенциала на земной поверхности.

Численная реализация формулы (6) связана с интегрированием, которое будем производить по формуле Simpson'a по двум сеткам, причём шаг сетки по переменной φ равен $h_1(l)$, а шаг сетки по переменной \bar{x}_M равен $h_2(g)$, где g и l – номера слагаемых квадратурной формулы. Тогда слагаемые формулы (6) примут вид $\mu = \sum_{g=1}^{N_2} h_2(g) \cdot \left[\sum_{l=1}^{N_1} h_1(l) \cdot (U^M\{\bar{x}_M(g), \bar{\rho}(l)\} - U^*(\bar{x}_M(g), \bar{\rho}^*(l))) \right]^2$ и $\Omega = \sum_{l=1}^{N_1} h_1(l) \bar{\rho}^2(l)$.

Поиск минимума функционала (6) будет производить методом сопряжённых градиентов, общая итерационная схема которого имеет вид

$$\bar{\rho}^{(q+1)} = \bar{\rho}^{(q)} + e^{(q)} \cdot I^{(q)}, \quad (7)$$

где $I^{(q)} = -\Phi'_{\bar{\rho}} + t^{(q)} \cdot I^{(q-1)}$, q – номер итерации; e – шаг минимизации, который определяется как результат одномерной минимизации функции $\Phi(\bar{\rho}^{(q+1)})$ методом «золотого сечения»; $I^{(0)} = -\Phi'_{\bar{\rho}}$; коэффициент $t^{(q)}$ определяется по одной из формул [11], $\Phi'_{\bar{\rho}}$ – производная функционала (6) [12, 13] $\Phi'_{\bar{\rho}} = d\mu + \alpha d\Omega$, где

$$d\mu = 2 \sum_{g=1}^{N_2} h_2(g) \cdot S \cdot h_1(j) dU^M\{\bar{x}_M(g), \bar{\rho}(j)\},$$

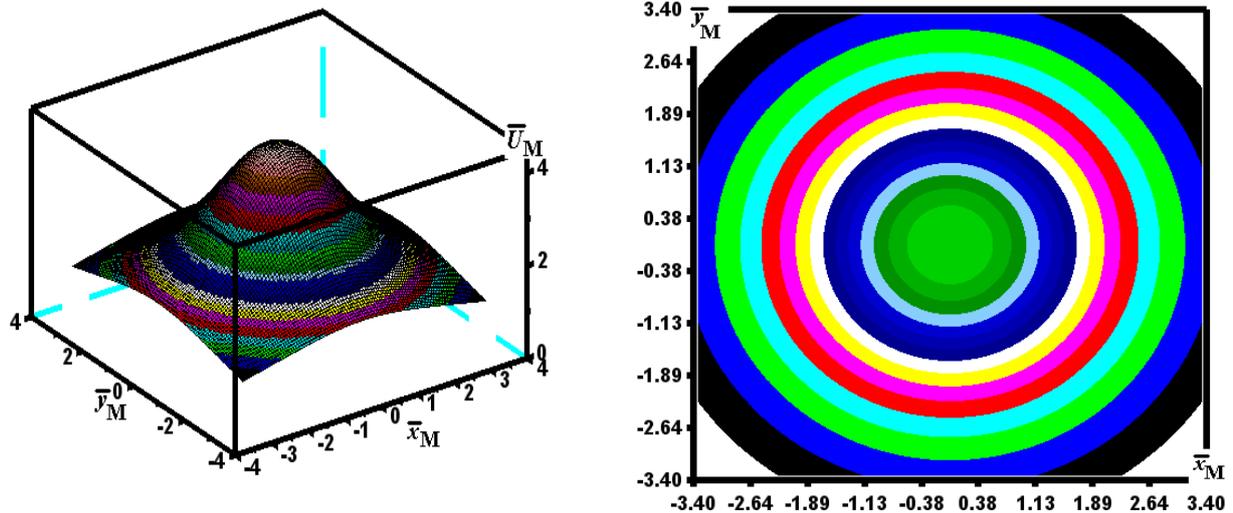
$$S = \left[\sum_{l=1}^{N_1} h_1(l) \cdot (U^M\{\bar{x}_M(g), \bar{\rho}(l)\} - U^*(\bar{x}_M(g), \bar{\rho}^*(l))) \right], d\Omega = 2h_1(j) \bar{\rho}(j), \quad (8)$$

$$dU^M = \frac{\bar{\rho}(j)}{\sqrt{\bar{\rho}^2(j) + B \cdot \bar{\rho}(j) + A}},$$

а j – номер компоненты вектора значений функции $\bar{\rho}(\varphi)$, по которой вычисляется производная.

3. Реализация численного алгоритма. Весь расчёт и визуализация графиков и поверхностей производилась в среде математических расчётов Scilab.

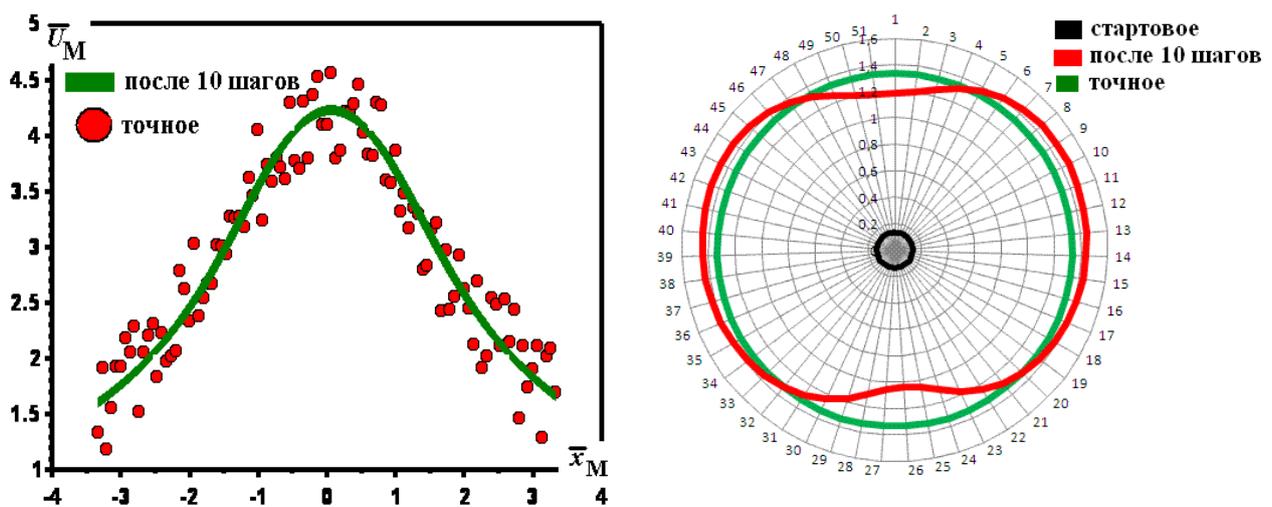
Тестовая модель будет состоять из источника тока в виде круга радиуса 200 м, расположенного на глубине $z_M = H = 150$. Удельное электросопротивление вмещающего пространства не важно, так как оно не влияет на форму распределения потенциала. Приведём результаты расчётов по формуле (4) в виде поверхности и карты изолиний приведённого потенциала (рисунок 2).



– Рисунок 2.

Поверхность и линии уровня значений приведённого потенциала поля, порождённого кругом радиуса 200 м.

Для простоты реализации алгоритма (7, 8) положим, что регуляризующий множитель $\alpha = 0$. Таким образом, реализуется метод наименьших квадратов в его первоначальной нерегуляризованной форме. Такое упрощение можно сделать, так как истинная и стартовая формы источники поля являются кругами. Далее будем предполагать, что для интерпретации используются только результаты измерений вдоль одной из центральных осей координат, то есть $y_M = 0$. Для моделирования погрешностей измерения будем добавлять к значениям потенциала U^M случайную, равномерно распределённую на отрезке $[0; 1]$ поправку. Приведём графики исходного и приближённого значений потенциала, а также графики в полярной системе координат для истинного и приближённого источников тока.



– Рисунок 3.

Исходные и восстановленные значения потенциала и формы источника поля после 10 шагов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А. Н.** Применение метода регуляризации в нелинейных задачах/ А.Н. Тихонов, В.Б.Гласко// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., –1965, т.5, № 3, – 463 – 473 с.
2. **Тихонов А. Н.** О приближённом решении интегральных уравнений Фредгольма 1 рода/ А.Н. Тихонов, В.Б.Гласко// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., –1964, т.4, № 3, – 564 – 571 с.
3. **Бакушинский А. Б.** Некорректные задачи. Численные методы и приложения / А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский // –М.: МГУ, –1989, –199 с.
4. **Кабанихин, С.И.** Обратные и некорректные задачи/ С.И. Кабанихин// – Сибирское научное издательство, Новосибирск, –2009, 458 с.
5. **Жданов, М. С.** Теория обратных задач и регуляризация в геофизике/ М. С. Жданов // –М.: Научный мир, –2007 710 с.
6. **Preto G.A.** Geophysical inverse theory Universidad de los Andres / German A. Preto // Elsiwer –2009, – 48 p.
7. **Tarantola, A.** Inverse problem theory and methods for model parameter estimation / A. Tarantola // – SIAM, –2005, – 358 p
8. **Zhdanov M.S.** Large-scale 3d inversion of marine magnetotelluric data: Case study from the Gemini prospect, Gulf of Mexico/ M.S.Zhdanov et all.//Geophysics, –2011, vol. 76, № 1, p. F77 – F87.
9. **Бурсиан В.Р.** Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке / В.Р. Бурсиан // – Л. Недра, – 1972 г, – 308 с.
10. **Hager, W. W.** A survey of nonlinear conjugate gradient methods/ W.W. Hager, H. Zhang // Pacific J. Optim. – 2006. – № 2, –p. 35 – 58.
11. **Пантелеев, А. В.** Методы оптимизации в примерах и задачах / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова // – М.: Высшая школа, –2005 год. – 544 с.
12. **Верлань, А. Ф.** Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков / –Киев: Наукова думка, –1986, 544 с.
13. **Васильева, А. Б.** Интегральные уравнения / А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов // –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 160 с.