УДК 519.6

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С ОГРАНИЧЕНИЕМ СРОКОВ ПОСТАВОК

Е. А. Зуева, В. П. Шаравина, магистранты гр. СПмоз-152
Научный руководитель: В. А. Гоголин, д.т.н., профессор
Кузбасский государственный технический университет
им. Т. Ф. Горбачева
г. Кемерово

В постановке транспортной задачи определяется один для всех поставщиков и заказчиков срок выполнения поставок (сутки, неделя и т.п.). Формулировка транспортной задачи сводится к следующему [1].

Рассматривается задача линейного программирования по нахождению минимума линейной функции $n \cdot m$ переменных:

$$Z(X) = c_{11} \cdot X_{11} + c_{12} \cdot X_{12} + \ldots + c_{mn} \cdot X_{mn}. \tag{1}$$

С ограничениями по поставкам от m поставщиков

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n} = A_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{m1} + X_{m2} + \ldots X_{mn} = A_m. \end{cases} \tag{2}$$

С ограничениями по заказам от n заказчиков

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} + \ldots + X_{m1} = B_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{X}_{1n} + X_{2n} + \ldots + X_{mn} = B_n \end{cases} \tag{3}$$

Коэффициенты c_{ij} линейной функции (1) есть тарифы или стоимости перевозки единицы груза от i – го поставщика к j – му заказчику.

В замкнутом варианте транспортной задачи общие объемы поставок и заказов равны, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j.$$

Транспортная задача решается методом потенциалов.

В дополнении к ограничениям транспортной задачи, вводятся ограничения по выполнению всех поставок в заданный срок.

Сроки поставок для n заказчиков задаются матрицей $T = (T_1, \ldots, T_n)$.

Мощности поставок от i-го поставщика к j-му заказчику задаются матрицей

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} . \; . \; . d_{1n} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \\ d_{m1} . \; . \; . d_{mn} \end{pmatrix}$$ – объемы вывозимых грузов в единицу времени.

Мощности поставок должны быть такими, чтобы не позже назначенного заказчиком срока T_j, заказы в объемах B_j были выполнены, что соответствует условию:

$$T_j \sum_{i=1}^{m} d_{ij} \geq B_j \,, \; j = 1,..n. \tag{4}$$

Из условия того, что каждый i-ый поставщик должен в срок не более чем за T_j единиц времени поставить свой груз в размере X_{ij}, следуют следующие дополнительные $m \cdot n$ ограничений по срокам поставок:

$$X_{ij} \leq T_j \cdot d_{ij} \,. \tag{5}$$

Таким образом, транспортная задача с ограничением сроков поставок сводится к нахождению минимума линейной функции (1) с ограничениями (2÷4). Задача решается симплекс-методом. Приведем пример решений транспортной задачи и транспортной задачи с ограничением сроков поставок.

Транспортная задача.

Три склада с заданными запасами товаров обслуживают 4 магазина в соответствии с их потребностями. Запасы, потребности и тарифы на перевозку единицы товара указаны в таблице.

	1	2	3	4	Запасы
1	4	5	6	3	110
2	2	5	4	6	190
3	3	4	7	1	90
Потребности	80	60	170	80	

Модель транспортной задачи является закрытой.

Математическая постановка задачи:

$Z(X)=4x_{11}+5x_{12}+6x_{13}+3x_{14}+2x_{21}+5x_{22}+4x_{23}+6x_{24}+3x_{31}+4x_{32}+7x_{33}+1x_{34} \to \min$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 110 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 190 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 90 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 170 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80 \end{cases}$$

Задача решалась методом потенциалов на сайте http://math.semestr.ru/transp/index.php.

Оптимальное решение:

Минимальные затраты составят:

F(x) = 5*50+6*60+2*80+4*110+4*10+1*80= 1330.

Транспортная задача с ограничениями сроков поставок

Заданы матрица сроков поставок T и матрица мощностей поставок D:

$$T = (4,3,6,4),\ D = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 & 8 \\ 10 & 10 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Проверим необходимое условие разрешимости задачи (4).

1) 4*(8+10+3)=84 > 80,
2) 3*(6+10+6)=66 > 60,
3) 6*(10+14+6)=180 > 170,
4) 4*(8+10+6)=96 > 80.

Дополнительные двенадцать ограничений по срокам поставок имеют следующий вид:

$$\begin{cases} X_{11} \le 4\cdot 8 = 32 \quad X_{12} \le 3\cdot 6 = 18 \quad X_{13} \le 6\cdot 10 = 60 \quad X_{14} \le 4\cdot 8 = 32 \\ X_{21} \le 4\cdot 10 = 40 \quad X_{22} \le 3\cdot 10 = 30 \quad X_{23} \le 6\cdot 14 = 84 \quad X_{24} \le 4\cdot 10 = 40 \\ X_{31} \le 4\cdot 3 = 12 \quad X_{32} \le 3\cdot 6 = 18 \quad X_{33} \le 6\cdot 6 = 36 \quad X_{34} \le 4\cdot 6 = 24 \end{cases}$$

Переобозначим переменные в целевой функции (1) и в ограничениях (2), (5).

$$X_{11} = x_1, X_{12} = x_2, X_{13} = x_3, X_{14} = x_4, X_{21} = x_5,$$

$$X_{22} = x_6, X_{23} = x_7, X_{24} = x_8, X_{31} = x_9,$$

$$X_{32} = x_{10}, X_{33} = x_{11}, X_{34} = x_{12}.$$

Получим следующую математическую постановку задачи в новых обозначениях

Найти минимум

$z(x)=4x_1+5x_2+6x_3+3x_4+5x_5+5x_6+4x_7+6x_8+3x_9+4x_{10}+7x_{11}+1x_{12}$

при 19 –ти ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 110 \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 190 \\ x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 90 \\ x_1 + x_5 + x_9 = 80 \\ x_2 + x_6 + x_{10} = 60 \\ x_3 + x_7 + x_{11} = 170. \\ x_4 + x_8 + x_{12} = 80 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \le 32 \\ x_2 \le 18 \\ x_3 \le 60 \\ x_4 \le 32 \\ x_5 \le 40 \\ x_6 \le 30 \\ x_7 \le 84 \\ x_8 \le 40 \\ x_9 \le 12 \\ x_{10} \le 18 \\ x_{11} \le 36 \\ x_{12} \le 24 \end{cases}$$

Задача решалась симплекс-методом на сайте
http://freesoft.ru/simpleksmetod/download/simplex.rar/getpage

Найдено оптимальное решение F=1698 при значениях переменных равных: X_3=50, X_8=36, X_{12}=24, X_6=30, X_{11}=36, X_1=28, X_2=12, X_9=12, X_5=1, X_4=20, X5=40, X_7=84, X_{10}=18.

Сравниваем полученное решение с решением транспортной задачи без ограничения сроков поставок.

Решение транспортной задачи без ограничения сроков поставок

	1	2	3	4	Запасы
1	0	50	60	0	110
2	80	0	110	0	190
3	0	10	0	80	90
Потребности	80	60	170	80	

Z_{min} = 1330

Решение транспортной задачи с ограничением сроков поставок

	1	2	3	4	Запасы
1	28	12	50	20	110
2	40	30	84	36	190
3	12	18	36	24	90
Потребности	80	60	170	80	

Z_{min} = 1698

Как показывает сравнение решений двух транспортных задач, учет ограничений по срокам поставок оказывает существенное влияние на оптимальное распределение поставок и значение минимума транспортных затрат.

Список литературы:

1. Тынкевич М.А. Экономико-математические методы (исследование операций). Кемерово, 2000. – 177 с.