УДК 535.33

ПРОЯВЛЕНИЕ ПРИНЦИПА СХОДИМОСТИ РЯДОВ ЛЕЙБНИЦА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Г.С. Загуменный, студент гр. $СП_{ПБ}$-151, I курс
Научный руководитель: Ю.А.Фадеев, д.ф.-м.н., профессор
Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф.Горбачева
г. Кемерово

Дифракция электромагнитного излучения проявляется в многочисленных явлениях. В частности, наблюдать дифракцию можно при решении различных прикладных задач, посвященных изучению кристаллов и межчастичному взаимодействию в них, фазовым переходам, надмолекулярным образованиям в виде кластеров и т.д. [1,2]. Как известно, дифракция является одним из проявлений волнового процесса [3]. Под дифракцией (в узком смысле этого слова) понимают огибание светом различных препятствий, проникновение волн в область геометрической тени. Французский физик Огюст Жан Френель в 1818 году разработал теорию дифракции света, основанной на разбиении фронта волны на зоны. Предложенный им метод разбиения волновой поверхности на зоны, позволил значительно упростить решение задач по объяснению явления дифракции. Заслуга Френеля в объяснении явления дифракции заключается в том, что он вложил в принцип Гюйгенса физический смысл, дополнив его идеей еще одним проявлением волновой теории - интерференцией волн. Согласно [3] модифицированный принцип Гюйгенса-Френеля стал основным принципом волновой оптики, который позволил исследовать вопросы, относящиеся к интенсивности результирующей волны в разных направлениях.

Согласно предложенному методу волновой фронт разбивается на зоны, от границ которых до точки наблюдения, l по мере возрастания номера зоны до точки наблюдения различаются на λ/2 (где λ – длина волны). Таким образом, колебания, возбуждаемые в точке наблюдения между двумя соседними зонами, будут противоположными по фазе и поэтому при сложении колебаний должны ослаблять друг друга. Амплитуда результирующего колебания определяется равенством

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \cdots + A_i \quad (1)$$

где A_i − амплитуда колебания i− ой зоны Френеля.

Различие площадей зон определяется выражением

$$\Delta S = \frac{\pi R l \lambda}{R+l} \quad (2)$$

где R – расстояние от источника изучения до фронта сферической волны.

В случае большого числа зон площади соседних зон будут практически одинаковыми. В связи с тем, что угол α между нормалями к зонам и направлением к точке наблюдения увеличивается, происходит последовательное уменьшение амплитуд колебаний, т.е. выполняется неравенство

$$\mathrm{A}_1 > \mathrm{A}_2 > \mathrm{A}_3 > \cdots > \mathrm{A}_\mathrm{i} \tag{3}$$

С формальной точки зрения выражение (1) представляет собой знакочередующий числовой ряд, в котором монотонно по абсолютному значению убывают последующие члены ряда, т.е. выполняется условие $|U_n| > |U_{n+1}|$ при любом значении n. Следуя положению о принципе сходимости знакочередующего ряда по признаку Лейбница, можно заключить, что такой ряд будет сходящимся, причем его сумма будет равна половине значения первого члена ряда. Отсюда следует, что основной вклад в интенсивность дифракционной картины будет давать первая зона Френеля, поскольку интенсивность излучения пропорциональна квадрату амплитуды волны. Качественное рассмотрение явления дифракции, наблюдаемое на круглом отверстии можно дополнить более строгим рассмотрением распространением сферических волн.

Предположим, что происходит свободное распространение сферических волн в однородной среде от точечного источника излучения. Волновой фронт представляет собой сферу радиусом R. В центре сферы расположен источник излучения. Расстояние от источника излучения до наблюдателя обозначим за ρ . Поле на поверхности волнового фронта представляется выражением

$$\mathrm{E}_0 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega \mathrm{t} - \mathrm{kR})}}{\mathrm{R}}, \tag{4}$$

где k – волновой вектор, ω – циклическая частота, t – время.

Предполагая, что радиус R велик по сравнению с длиной волны λ, найдем

$$\frac{\delta \mathrm{E}}{\delta n} = \frac{E_0}{\delta R}. \tag{5}$$

Поле в точке наблюдения находим с помощью выражения

$$\mathrm{E} = \frac{ik}{4\pi} \oint (1 + cos\alpha) E_0 \frac{e^{-ikR}}{R}\, dF, \tag{6}$$

где dF – излучающий центр, α – угол между нормалью к зоне Френеля на волновой поверхности и направлением к точке наблюдения.

Согласно [5]

$$E = \oint \mathrm{K}(\alpha, \mathrm{R}) \frac{\mathrm{e}^{-ikR}}{\mathrm{R}} \mathrm{dF}\ , \tag{7}$$

$$\text{где}\quad \mathrm{K}\,(\alpha, R) = \frac{1}{4\pi}\left[[\left(ik + \frac{1}{R} \right) Ecos\alpha - \frac{\delta E}{\delta n} \right] \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (6), получаем

$$\mathrm{K}(\alpha) = \frac{\mathrm{ik}(1 + \cos\alpha)}{4\pi} \tag{9}$$

Из (9) видно, что $K(\alpha)$ мнимая величина и по абсолютному значению монотонно убывает.

Приведем (6) к виду

$$\mathrm{E} = \int_{r_1}^{r_2} A(r) e^{-ikR}\, dR \ , \qquad (10)$$

где $A(r) = \frac{ik(1+cos\alpha)}{2(\rho+R)}$, r_1 и r_2 – наибольшее и наименьшее значения R.

Проведя интегрирование, получаем

$$E = \frac{A(r_1)e^{-ikr_1} - A(r_2)e^{-ikr_2}}{ik}. \qquad (11)$$

Эта величина представляет собой разность одной и той же функции при разных значениях r отличающихся на $\frac{\lambda}{2}$. Таким образом, получаем

$$E = U_1 + (-1)^{N+1} U_{N+1}, \qquad (12)$$

где $U_1 = \frac{1}{2} E_1$.

Список литературы:

1. Фадеев Ю.А., Демьянов В.В. Электрические и оптические свойства кристаллов – Кемерово: Кузбасский гос. техн. ун-т. 2003. – 109 с.
2. Фадеев Ю.А., Прыкин А.Г. Электронно-колебательная структура молекул и кристаллов – Томск: Томский гос. ун-т. 1999. – 173 с.
3. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Наука. 1976. – 928 с.